Sammlung Schubert LVII

Komplex-Symbolik

von

Roland Weitzenböck

G. J. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig

Sammlung Schubert

Sammlung mathematischer Lehrbücher.

Verzeichnis der erschienenen und projektierten Bände.

Erschienen sind bis November 1908:

Band I: **Elementare Arithmetik und Algebra** von Professor Dr. Her-

Geb. M. 4.40.

Band XXVII: **Geometrische Transformationen I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen** von Prof. Dr. Karl Doehlemann in München. Geb. M. 10.—.

Band XXVIII: **Geometrische Transformationen II. Teil: Die quadratischen und höheren, birationalen Punkttransformationen** von Prof. Dr. Karl Doehlemann in München. Geb. M. 10.—.

Band XXIX: **Allgemeine Theorie der Raumkurven u. Flächen I. Teil** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Prof. Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. Geb. M. 4.80.

Band XXX: **Elliptische Funktionen I. Teil: Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt** von Prof. Dr. Karl Boehm in Heidelberg. Geb. M. 8.60.

Band XXXI: **Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. Geb. M. 8.50.

Band XXXII: **Theorie und Praxis der Reihen** von Prof. Dr. C. Runge in Hannover. Geb. M. 7.—.

Band XXXIV: **Liniengeometrie mit Anwendungen I. Teil** von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. Geb. M. 12.—.

Band XXXV: **Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die linearen Räume** von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. Geb. M. 10.—.

Band XXXVI: **Mehrdimensionale Geometrie II. Teil: Die Polytope** von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. Geb. M. 10.—.

Band XXXVII: **Lehrbuch der Mechanik I: Kinematik** von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe. Geb. M. 8.—.

Band XXXVIII: **Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung I. Teil** von Prof. E. Grimsehl in Hamburg. Geb. M. 6.—.

Band XXXIX: **Thermodynamik I. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen. Geb. M. 10.—.

Band XL: **Mathematische Optik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. Geb. M. 6.—.

Band XLI: **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus I. Teil: Elektrostatik und Elektrokinetik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. Geb. M. 5.—.

Band XLII: **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus II. Teil: Magnetismus und Elektromagnetismus** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. Geb. M. 7.—.

Band XLIII: **Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung** von Dr. Heinr. Wieleitner in Speyer. Geb. M. 10.—.

Band XLIV: **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen II. Teil** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Prof. Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. Geb. M. 5.80.

Band XLV: **Niedere Analysis II. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. Geb. M. 3.80.

Band XLVI: **Thetafunktionen und hyperelliptische Funktionen** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. Geb. M. 4.50.

Band XLVIII: **Thermodynamik II. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen. Geb. M. 10.—.

Band XLIX: **Nichteuklidische Geometrie** von Prof. Dr. Heinr. Liebmann in Leipzig. Geb. M. 6.50.

Band L: **Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung** von Dr. J. Horn, Professor an der Bergakademie zu Clausthal. Geb. M. 10.—.

Band LI: **Liniengeometrie mit Anwendungen II. Teil** von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. Geb. M. 8.—.
Band LII: **Theorie der geometrischen Konstruktionen** von Professor Aug. Adler in Wien. Geb. M. 9.—.
Band LIII: **Grundlehren der neueren Zahlentheorie** von Professor Dr. Paul Bachmann in Weimar. Geb. M. 6.50.
Band LIV: **Analytische Geometrie auf der Kugel** von Studienrat Prof. Dr. Rich. Heger in Dresden. Geb. M. 4.40.
Band LV: **Gruppen- u. Substitutionentheorie** von Prof. Dr. Eugen Netto in Gießen. Geb. M. 5.20.
Band LVI: **Spezielle ebene Kurven** von Dr. Heinr. Wieleitner in Speyer. Geb. M. 12.—.
Band LVII: **Komplex-Symbolik** von k. k. Leutnant Roland Weitzenböck in Linz a. D. Geb. M. 4.80.

In Vorbereitung bzw. projektiert sind:

Darstellende Geometrie von Prof. Dr. Th. Schmid in Wien.
Geschichte der Mathematik II. Teil von Prof. Dr. A. v. Braunmühl in München.
Dynamik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Technische Mechanik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Allgemeine Funktionentheorie von Dr. Paul Epstein in Straßburg.
Räumliche projektive Geometrie.
Elliptische Funktionen II. Teil von Dr. Karl Boehm in Heidelberg.
Allgemeine Formen- und Invariantentheorie von Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg.
Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung II. Teil von Prof. E. Grimsehl in Hamburg.
Liniengeometrie III. Teil von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck.
Elektromagnetische Lichttheorie von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg.
Theorie der Flächen dritter Ordnung.
Mathematische Potentialtheorie von Prof. Dr. A. Wangerin in Halle.
Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Bauwesen von Dr.-Ing. H. Reißner in Berlin.
Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Maschinenbau von Dr. Rudolf Wagner in Stettin.
Graphisches Rechnen von Prof. Aug. Adler in Wien.
Partielle Differentialgleichungen von Professor J. Horn in Clausthal.
Vektorenanalyse.
Sphärische Astronomie von Dr. von Flotow in Charlottenburg.
Grundlehren der geographischen Ortsbestimmung von Dr. K. Graff in Hamburg.
Theoretische Astronomie von Dr. Gust. Witt in Berlin.
Astrophysik.
Grundlagen der theoretischen Chemie von Dr. Franz Wenzel in Wien.

Sammlung Schubert LVII

Komplex-Symbolik

Eine Einführung

in die

analytische Geometrie mehrdimensionaler Räume

von

Roland Weitzenböck

k. und k. Leutnant im Pionierbataillon Nr. 2

Linz a. d. Donau

Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1908

GERMANY

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig

Vorwort.

Die nachstehenden Ausführungen sollen bezwecken, ein interessantes Gebiet der Geometrie in mehrdimensionalen Räumen zu erschließen. Es handelt sich um die linearen Komplexe in mehr als drei Dimensionen. Diese Arbeit selbst behandelt nur die Komplexe im vier- und fünfdimensionalen Raum ziemlich ausführlich. Es ist im übrigen mehr darauf abgesehen worden, die äußerst einfache und ökonomische Art der analytischen Behandlung dieses Gebietes zum Ausdruck zu bringen. Vorausgeschickt werde, daß ich mich durchweg der homogenen Schreibweise bediente und trachtete, den Formen- und invariantentheoretischen Teil der Ausführungen besonders hervorzuheben. Es fällt demgemäß jede Metrik im Sinne der euklidischen Geometrie weg.

Die Schreibweise schließt sich ganz der von Aronhold-Clebsch eingeführten symbolischen Darstellung an. Es liegt in dieser Richtung wohl schon eine Arbeit von E. Waelsch vor (Zur Invariantentheorie der Liniengeometrie, Sitzungsberichte der k. Akad. d. Wissensch., Wien, 5./12. 89); doch scheint es mir, daß sich diese Schreibart weniger an die gewöhnliche Symbolik anschließt. Es ist vielleicht nicht unnütz, zu erwähnen, daß ich diese Schreibart, ohne von der Arbeit von Waelsch zu wissen, selbständig begründete; daraus mag sich manche Abweichung in der Bezeichnung erklären.

Der Abschnitt I gibt eine ausführliche Erklärung der komplexsymbolischen Darstellung und einige Anwendungen. Als weitere Anwendung und Anregung für Arbeiten in dieser Richtung sind die Abschnitte II und III bestimmt. In den Abschnitten IV, V und VI hoffe ich etwas Neues zu bringen. Sie dienen als Vorarbeit für eine allgemeine Theorie im R_n.

Im VIII. Abschnitt wird gezeigt, daß durch die symbolischen Methoden in der „analytischen Geometrie der Lage“ tatsächlich die eleganteste und einfachste Behandlungsart geboten wird, da hierdurch gewissermaßen mit den geometrischen Gebilden selbst mathematisch operiert wird.

Für diejenigen, welche mit den symbolischen Rechnungen weniger vertraut sind, empfehle ich die diesbezüglichen Kapitel in dem Werke Clebsch-Lindemann, Vorlesungen, Bd. I zur Orientierung.

Ich kann nicht umhin, an dieser Stelle dem Herrn k. k. Professor der Universität Innsbruck, Dr. Konrad Zindler, für manchen guten Rat und für die Durchsicht von Teilen des Manuskriptes meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

Chiesa di Lavarone, im Juli 1908.

Der Verfasser.

Inhalt.

I. Abschnitt.

Die Komplexe im dreidimensionalen Raume.

II. Abschnitt.

Systeme von linearen Komplexen.

III. Abschnitt.

Die quadratischen Komplexe.

IV. Abschnitt.

Die linearen Komplexe im vierdimensionalen Raume.

V. Abschnitt.

Die linearen Komplexe im R_5.

VI. Abschnitt.

Der Geradenkomplex im R_n.

VII. Abschnitt.

Der R_5 als Komplexraum.

VIII. Abschnitt.

Die analytische Geometrie.

I. Abschnitt.

Der lineare Komplex im dreidimensionalen Raume.

1. Die Symbolik.

Unter einem Symbol versteht man in der Invariantentheorie ein mathematisches Zeichen, das allein keinen Sinn hat, sondern erst mit einer oder mehreren Größen zusammen, denen man dieselbe Bedeutung beilegt, eine wirkliche Zahl darstellt. Durch diese Unselbständigkeit eines Symbols werden diese den Atomen oder Radikalen der Chemie vergleichbar.

Das Zustandekommen von wirklichen Zahlen aus Symbolen erfolgt durch Multiplikation. Hieraus ergibt sich sofort eine Zweiteilung der Symbole: 1. Solche, bei denen das kommutative Gesetz gilt, nenne ich „gewöhnliche“ Symbole; 2. solche, bei denen das kommutative Gesetz nicht gilt, diese nenne ich „Komplexsymbole“.

Die Symbole bezeichnet man durch Buchstaben oder Ziffern mit einem angehängten Index, der die Zahlen 1, 2, 3, ..., $n+1$ durchläuft, je nach der Dimensionszahl n des Operationsraumes. Ich spreche daher von 1-, 2-, ..., n-dimensionalen Symbolen.

Sind m gleichartige Symbole zu vereinigen, um eine wirkliche Zahl zu bilden, so nenne ich das Symbol m-fältig. So stellt z. B. $a_x^n \equiv (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n$ in der Theorie der binären Formen eine Form $n$ter Ordnung dar. Die a_i sind hier gewöhnliche, eindimensionale und n-fältige Symbole.

a) Gewöhnliche Symbole.

Ich stelle hier nur das Wichtigste zusammen, was später im Texte verwendet wird, da ausführlichere Erläuterungen in vielen Werken leicht nachzuschlagen sind*).

Die zwei wichtigsten Ausdrücke der Formentheorie, welche invarianten Charakter tragen, sind die Summe und die Determinante von homogenen Größen, wie z. B. $u'_x = u'_1 x_1 + u'_2 x_2 + u'_3 x_3$ und

$$(x\,y\,z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

So ist z. B. durch $a'_x = 0$ in der Geometrie der Ebene eine Gerade, durch $a'^2_x = 0$ ein Kegelschnitt dargestellt. In letzter Gleichung sind die a'_i gewöhnliche, zweifältige und zweidimensionale Symbole, also

$$a'_i a'_k = a'_k a'_i = a'_{ik}\,.$$

Wie leicht einzusehen, sind einfältige Symbole mit wirklichen Zahlen identisch.

Wenn in symbolischen Ausdrücken Koeffizienten in höherem als vom ersten Grade vorkommen, und diese Koeffizienten symbolisch dargestellt sind, so könnten beim Ausrechnen Zweideutigkeiten entstehen. Wie bekannt, hilft man sich dann dadurch, daß man für dasselbe Symbol a'_i einen anderen Buchstaben, z. B. b'_i, schreibt und dann alle a'_i, b'_k usw. für sich zu Zahlen vereinigt.

Ich stelle nun hier die wichtigsten Identitäten zum Umformen von Ausdrücken zusammen.

Für das binäre Gebiet:

Da

$$|a'_1 b'_2 c'_x| \equiv \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_x \\ b'_1 & b'_2 & b'_x \\ c'_1 & c'_2 & c'_x \end{vmatrix} \equiv 0\,,$$

so wird entwickelt:

(1) $$\underline{(a'b')\,c'_x + (c'a')\,b'_x + (b'c')\,a'_x \equiv 0}$$

*) Vgl. z. B. Clebsch, Die Theorie der binären Formen oder Clebsch-Lindemann, Vorlesungen, Bd. I, 3. Abteilung.

und hieraus für $x_1 = d_2'$, $x_2 = -d_1'$

$$(2)\qquad \underline{(a'b')\,(c'd') + (c'a')\,(b'd') + (b'c')\,(a'd') \equiv 0\,.}$$

Für die Ebene erhält man aus

$$|\,a_1' b_2' c_3' d_x'\,| \equiv 0$$

$$(3)\qquad \underline{(b'c'd')\,a_x' - (c'd'a')\,b_x' + (d'a'b')\,c_x' - (a'b'c')\,d_x' \equiv 0\,.}$$

Für $x_i = (e'f')_i$ wird hieraus:

$$(4)\qquad \begin{cases} \underline{(b'c'd')\,(a'e'f') - (c'd'a')\,(b'e'f')} \\ \underline{+\,(d'a'b')\,(c'e'f') - (a'b'c')\,(d'e'f') \equiv 0\,.} \end{cases}$$

Ist hier $d_i' = f_i'$, so wird:

$$(5)\qquad \underline{(b'c'd')\,(a'e'd') - (c'd'a')\,(b'e'd') + (d'a'b')\,(c'e'd') \equiv 0\,.}$$

Schließlich haben wir im quaternären Gebiet oder für die analytische Geometrie des Raumes, da

$$|\,a_1' b_2' c_3' d_4' e_x'\,| \equiv 0\,,$$

$$(6)\qquad \begin{cases} \underline{(b'c'd'e')\,a_x' + (c'd'e'a')\,b_x' + (d'e'a'b')\,c_x'} \\ \underline{+\,(e'a'b'c')\,d_x' + (a'b'c'd')\,e_x' \equiv 0\,.} \end{cases}$$

Daraus folgt für $x_i = (f'g'h')_i$, wenn wir den Strich weglassen:

$$(7)\qquad \begin{cases} \underline{(b\,c\,d\,e)\,(a\,f\,g\,h) + (c\,d\,e\,a)\,(b\,f\,g\,h) + (d\,e\,a\,b)\,(c\,f\,g\,h)} \\ \underline{+\,(e\,a\,b\,c)\,(d\,f\,g\,h) + (a\,b\,c\,d)\,(e\,f\,g\,h) \equiv 0\,.} \end{cases}$$

Ist hier $e_i = f_i$, so wird:

$$(8)\qquad \begin{cases} \underline{(b\,c\,d\,e)\,(a\,e\,g\,h) + (c\,d\,e\,a)\,(b\,e\,g\,h) + (d\,e\,a\,b)\,(c\,e\,g\,h)} \\ \underline{+\,(e\,a\,b\,c)\,(d\,e\,g\,h) \equiv 0\,.} \end{cases}$$

Ist außerdem $d_i = g_i$, so wird:

$$(9)\qquad \underline{(b\,c\,d\,e)\,(a\,e\,d\,h) + (c\,d\,e\,a)\,(b\,e\,d\,h) + (d\,e\,a\,b)\,(c\,e\,d\,h) \equiv 0\,.}$$

Hier kommen nur noch sechs Größenreihen vor; bei weniger ist eine Identität mit vierreihigen Determinanten nicht mehr möglich.

b) Komplexsymbole.

Ich behandle hier vorläufig nur die dreidimensionalen, zweifältigen Komplexsymbole. Um ein solches gleich zu erkennen, benutzen wir für die Komplexsymbole die Buchstaben $p, q, r, \pi, \varrho, \ldots$; nur wenn es ausdrücklich betont wird, sind a, b, α, β als Komplexsymbole aufzufassen.

Für ein zweifältiges Komplexsymbol gilt die Gleichung

$$\underline{p_i p_k = -p_k p_i} \tag{10}$$

oder in wirklichen Zahlen:

$$p_{ik} = -p_{ki} \,.$$

Man sieht sofort, daß beim Rechnen auf die Schreibweise genau zu achten ist. Wir nehmen immer, da wir ja von links nach rechts schreiben, ein linksstehendes Symbol als erstes an, d. h. wir setzen für das Produkt $p_i p_k$ die Größe p_{ik}. Das Komponieren einer wirklichen Zahl aus Komplexsymbolen erfolgt also nicht allein durch Multiplikation; es ist hierbei auf die gegenseitige Stellung, die die betreffenden Symbole in der Gleichung einnehmen, zu achten. Man könnte die Komplexsymbole daher auch Vektorsymbole nennen, da sie in bezug auf ein Komponieren derselben die Festlegung eines bestimmten Sinnes erfordern.

Aus (10) folgt für $i = k$:

$$\underline{p_i^2 = p_{ii} = 0\,.} \tag{11}$$

Wir gehen nun daran, die Summen- und Determinantenform für zweifältige Komplexsymbole zu untersuchen.

Es sei also wieder wie oben:

$$p_{u'} = u'_p = p_1 u'_1 + p_2 u'_2 + p_3 u'_3 + p_4 u'_4 \,.$$

Das Produkt $p_{u'} p_{v'}$ gibt dann, wobei beim Ausmultiplizieren der zwei Polynome $p_{u'}$ und $p_{v'}$ genau auf links und rechts zu achten ist und da $p_{ii} = 0$:

$$p_{u'} p_{v'} = p_{12}(u'v')_{12} + p_{13}(u'v')_{13} + p_{14}(u'v')_{14} + p_{23}(u'v')_{23} + p_{34}(u'v')_{34} + p_{42}(u'v')_{42} \,.$$

Hierbei ist

$$(u'v')_{ik} = u'_i v'_k - v'_i u'_k \,.$$

Es ist also

(12) $$\underline{p_{u'}p_{v'} = \Sigma p_{ik}(u'v')_{ik}\,;}$$

daraus folgt für $u' = v'$:

(13) $$\underline{p_{u'}^2 \equiv 0\,.}$$

(13) ergibt sich auch aus der Relation $p_{u'}p_{v'} = -p_{v'}p_{u'}$.

In (13) sind die u_i' beliebige Größen, nur keine Komplexsymbole, insbesondere ist auch $p_{a'}^2 \equiv 0$, wenn a_i' gewöhnliche, zweifältige Symbole sind.

Wir setzen nun für u_i' und v_i' Komplexsymbole q_i'. Aus $(u'v')_{ik}$ wird dann

$$(q'q')_{ik} = q_i'q_k' - q_k'q_i' = 2\,q_{ik}'\,.$$

Somit wird aus (12):

(14) $$\underline{p_{q'}^2 = 2\,\Sigma p_{ik}q_{ik}'\,.}$$

Sind i, k, m, n die vier Zahlen 1, 2, 3, 4, so setzen wir immer $p_{ik} = p_{mn}'$, wobei von den Paaren $(i\,k)$ und $(m\,n)$ immer folgende zusammengehören: (12) und (34), (13) und (42), (14) und (23). Hierdurch werden auf der rechten Seite von (14) Minuszeichen vermieden. Die Indexgruppen von zwei zusammengehörigen Paaren nennt man „komplementär".

Aus (14) wird dann:

$$p_{q'}^2 = 2\,\Sigma p_{ik}q_{mn} = 2\,\Sigma p_{mn}'q_{mn}\,,$$

also

(15) $$\underline{p_{q'}^2 = p_q'^2\,.}$$

Für $p_{ik} = q_{ik}$ oder, wie wir abgekürzt schreiben wollen, für $p^2 = q^2$ folgt aus (14) noch

(16) $$\underline{p_{p'}^2 = 4(p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23})\,.}$$

Wir gehen nun zu den Determinanten über, welche Komplexsymbole enthalten. Eine solche trat uns schon in dem Ausdrucke $(p'p')_{ik} = \begin{vmatrix} p_i' & p_k' \\ p_i' & p_k' \end{vmatrix}$ gegenüber. Wir sahen, daß $(p'p')_{ik} = 2\,p_i'p_k' = 2\,p_{ik}'$ war. Es ist hier offenbar der Satz aus der Determinantentheorie, daß eine Determinante mit zwei gleichen Reihen verschwindet, auf Komplexsymbole nicht übertragbar, insofern die beiden gleichen Reihen dieselben Komplexsymbole enthalten. Entwickelt man

$$\begin{vmatrix} p_i & p_k \\ p_i & p_k \end{vmatrix}$$

nach der ersten Zeile, so wird $(p_i p_k - p_k p_i) = 2 p_{ik}$; entwickelt man aber nach der ersten Kolonne, so erhält man $p_i p_k - p_i p_k \equiv 0$. Um hier mit dem früheren Resultat übereinzustimmen, müssen wir den Minor p_k von p_i der zweiten Zeile nicht wie gewöhnlich negativ, sondern positiv einführen, so daß man auch $p_i p_k + p_i p_k = 2 p_{ik}$ erhält.

Für eine Determinante, welche zwei Reihen gleichartiger Komplexsymbole enthält, gelten also nicht die gewöhnlichen Regeln für die Ausrechnung einer Determinante. Insbesondere verschwindet z. B. die vierreihige Determinante $(p\,p\,x\,y)$ nicht identisch, obwohl zwei gleiche Reihen vorkommen. Entwickeln wir

$$(p\,p\,x\,y) = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

nach der ersten Zeile ganz normal, so wird

$$(p\,p\,x\,y) = 2 \Sigma p_{ik} (x\,y)_{mn} .$$

Entwickelt man aber nach der ersten Kolonne, so muß die Unterdeterminante von p_1 der zweiten Zeile nicht wie gewöhnlich negativ, sondern positiv eingeführt werden.

Nach zweireihigen Minoren entwickelt, gibt

(17) $$\underline{(p\,p\,x\,y) = 2 \Sigma p_{ik} (x\,y)_{mn}}$$

oder auch

$$(p\,p\,x\,y) = 2 \Sigma p'_{mn} (x\,y)_{mn} ,$$

also nach (12)

(18) $$\underline{(p\,p\,x\,y) = 2 p'_x p'_y .}$$

Setzt man hier $x = y = q_i$, so wird, wenn q_i Komplexsymbole sind:

(19) $$\underline{(p\,p\,q\,q) = (p^2 q^2) = 2 p'^2_q .}$$

Haben hier p^2 und q^2 dieselbe Bedeutung, so ist nach (16)

(20) $$\underline{(p\,p\,q\,q) = 8(p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23}) = (p'p'q'q')\,.}$$

Führt man $u'_x v'_y - v'_x u'_y$ aus, so wird:

$$(u'_x v'_y - v'_x u'_y) = \Sigma(u'v')_{ik}\,(x\,y)_{ik}\,,$$

wo sich die Summe auf alle sechs Indexkombinationen erstreckt. Wir setzen hierfür, analog der Summe $u'_x = \Sigma\, u'_i x_i$, die Abkürzung $(u'v')_{(xy)}$, also

(21) $$\underline{u'_x v'_y - v'_x u'_y = (u'v')_{(xy)} = (x\,y)_{(u'v')}\,.}$$

Daraus wird für $u' = v' = p'$

(22) $$\underline{(p'p')_{(xy)} = 2\,p'_x p'_y = (p\,p\,x\,y)\,.}$$

Ist hier weiter $x_i = y_i = q_i$, so kommt

(23) $$\underline{(p'p')_{(qq)} = 2\,p^2_{q'} = 2\,p'^2_q = (p\,p\,q\,q) = (p'p'q'q')\,.}$$

Wir gehen nun daran, die Formeln (6) und (7) für den Fall aufzustellen, daß unter den Größenreihen a_i, b_i, c_i, ... auch Komplexsymbole vorkommen. Setzt man in (6) statt a'_i und b'_i die Komplexsymbole p'_i ein und berücksichtigt das über Determinanten mit Komplexsymbolen Gesagte bei der Entwicklung von

$$\begin{vmatrix} p'_1 & p'_2 & p'_3 & p'_4 & p'_x \\ p'_1 & p'_2 & p'_3 & p'_4 & p'_x \\ c'_1 & c'_2 & . & . & c'_x \\ d'_1 & . & . & . & d'_x \\ e'_1 & . & . & . & e'_x \end{vmatrix}$$

nach der letzten Kolonne, so erhält man:

$$-2(p'c'd'e')\,p'_x + (d'e'p'p')c'_x + (e'p'p'c')\,d'_x$$
$$+ (p'p'c'd')\,e'_x \equiv 0$$

oder nach Anwendung von (18) auf die letzten drei Glieder:

(24) $$\underline{(p'c'd'e')\,p'_x \equiv p_{d'}\,p_{e'}\,c'_x + p_{e'}\,p_{c'}\,d'_x + p_{c'}\,p_{d'}\,e'_x\ ^{*)}.}$$

Wir können ebenso die Determinante

$$|\,p_1\,p_2\,c_3\,d_4\,e_{u'}\,|$$

---

*) Vgl. die im Vorwort genannte Arbeit von Waelsch.

entwickeln und erhalten dann eine Gleichung, die aus (25) entsteht, wenn wir p', c', d', e', x durch p, c, d, e, u' ersetzen, also

$$\underline{(p\,c\,d\,e)\,p_{u'} \equiv p'_d\,p'_e\,c_{u'} + p'_e\,p'_c\,d_{u'} + p'_c\,p'_d\,e_{u'}\,.} \tag{25}$$

Formel (24) und (25) nennen wir zueinander dual, was weiter unten näher begründet wird.

Setzen wir in (6) nicht nur $a' = b' = p'$, sondern auch $c' = d' = q'$, so wird:

$$2(p'q'q'e')\,p'_x \equiv -2(q'e'p'p')\,q'_x + (p'p'q'q')\,e'_x\,,$$

also nach (18) und (19):

$$\underline{q_{p'}\,q_{u'}\,p'_x \equiv -p_{q'}\,p_{u'}\,q'_x + \tfrac{1}{2}\,p^2_{q'} \cdot u'_x} \text{ *)}, \tag{26}$$

die dazu duale Formel wird:

$$\underline{q'_p\,q'_x\,p_{u'} \equiv -q_{p'}\,q_{u'}\,p'_x + \tfrac{1}{2}\,p'^2_q\,u'_x\,.} \tag{26a}$$

(26) und (26a) sind zwei wichtige Identitäten, welche wir oft anwenden werden.

Haben p^2 und q^2 dieselbe Bedeutung, sind also miteinander vertauschbar, so können wir im ersten Term rechts von (26) p mit q vertauschen und ihn dann nach links schaffen. Hierdurch wird:

$$\underline{q_{p'}\,q_{u'}\,p'_x = p_{q'}\,p_{u'}\,q'_x \equiv \tfrac{1}{4}\,p^2_{q'}\,u'_x\,.} \tag{27}$$

Wir setzen nun in (7) für a und $e \ldots p$, für b und $f \ldots q$, für c und $g \ldots \pi$, schließlich für d und $h \ldots \varrho$; dann werden das erste und letzte Glied in (7) einander gleich und es kommt:

$$-2(p\,q\,\pi\,\varrho)^2 + (\pi\,\varrho\,p\,p)\,(q\,q\,\pi\,\varrho) + (\varrho\,p\,p\,q)\,(\pi\,q\,\pi\,\varrho) \\ + (p\,p\,q\,\pi)\,(\varrho\,q\,\pi\,\varrho) \equiv 0$$

oder

$$\underline{(p\,q\,\pi\,\varrho)^2 \equiv 2\,p'_\pi\,p'_\varrho\,q'_\pi\,\varrho'_\varrho + 2\,p'_\varrho\,p'_q\,\pi'_\varrho\,\pi'_q + 2\,p'_q\,p'_\pi\,\varrho'_q\,\varrho'_\pi\,.} \tag{28}$$

Sind hier p^2, q^2, π^2, ϱ^2 gleichbedeutend, so wird durch Anwendung von (27) auf die drei Terme der rechten Seite in (28):

$$\underline{(p\,q\,\pi\,\varrho)^2 = \tfrac{3}{2}(p^2_{q'})^2 = \tfrac{3}{2}(p'^2_q)^2\,.} \tag{29}$$

---

*) Vgl. die im Vorwort genannte Arbeit von Waelsch.

Hiermit haben wir die wichtigsten Identitäten zwischen Größen, unter denen zweifältige und dreidimensionale Komplexsymbole vorkommen, erledigt. Wir wenden uns nun zur Anwendung dieser Symbolik auf die analytische Geometrie des dreidimensionalen Raumes.

2. Punkt, Ebene und Gerade.

Wir bezeichnen die Koordinaten von Punkten durch die Buchstaben x_i, y_i, z_i, ... Ein einzelner Punkt ist bestimmt durch die eine Größenreihe x_1, x_2, x_3, x_4. Eine Gerade ist durch zwei Punkte x und y, also analytisch durch die zwei Reihen von Größen

$$|xy| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

festgelegt.

Bei einer Ebene endlich genügen drei Größenreihen:

$$|xyz| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

zu ihrer Bestimmung.

Aus diesen Größenreihen, welche wir gleich in Matrixen zusammenstellten, bildet man nun die Begriffe der Koordinaten von Gerade und Ebene. Wir beginnen bei der Ebene.

Aus den drei Größenreihen x_i, y_i und z_i von je vier Punktkoordinaten lassen sich $\binom{4}{3} = 4$ dreireihige Determinanten $(xyz)_i$ bilden, welche man die „Koordinaten der Ebene xyz" nennt. Es erscheint also die Ebene, so wie der Punkt, durch vier Größen (auf deren Verhältnis es nur ankommt) festgelegt. Dies verleiht den soeben definierten Koordinaten in Determinantenform selbständigen Charakter, wie es ja auch nach dem Dualitätsprinzipe sein muß.

Wir bezeichnen im folgenden die vier Koordinaten einer Ebene durch u', v', w', ...

Bei der Geraden erhält man aus der Matrix $|xy|$ $\binom{4}{2} = 6$ homogene Größen $(xy)_{ik}$, die „Strahlkoordinaten" der Geraden $\overline{xy}$. Diese Größen bezeichnen wir mit p_{ik}. Zwischen ihnen besteht eine Identität, da es nur ∞^4 Gerade im R_3 gibt. Man erhält sie aus $(x\,y\,x\,y) \equiv 0$ in der Form

$$2(p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23}) = 0\,.$$

Hier können wir nun die Zahlen p_{ik} durch Komplexsymbole darstellen, denn die dazu nötigen Bedingungen $p_{ik} = -p_{ki}$, $p_{ii} = 0$ sind erfüllt. Dann erhält obige Identität nach (16) folgende Gestalt:

$$p_{p'}^2 \equiv 0\,. \tag{30}$$

Die Gerade ist im R_3 zu sich selbst reziprok, man erhält daher auch aus den zwei Größenreihen u_i' und v_i' für die Geraden sechs Koordinaten $p_{ik}' = (u'v')_{ik}$, die Achsenkoordinaten der Geraden. Zwischen ihnen besteht wieder die Identität $p_p'^2 \equiv 0$, die nichts anderes als (30) ist, da sich leicht zeigen läßt, daß man für $p_{ik} \ldots \varrho\, p_{mn}'$ setzen kann, wo $i\,k$ komplementär zu $m\,n$ ist. Wir nehmen weiterhin immer $p_{ik} = p_{mn}'$ an, wodurch die Allgemeinheit der Rechnung in keiner Weise beeinträchtigt wird.

Man sieht hier, daß mit einem einzigen Buchstaben p eine einzige Gerade bezeichnet ist; p_{ik} sind ihre Strahl-, p_{ik}' ihre Achsenkoordinaten. Es wird hierdurch an Zeichen gespart, was bei Rechnungen, in denen mehrere Gerade auftreten, sehr wünschenswert erscheint. Bezeichnet man doch auch in Figuren eine Gerade mit einem einzigen Buchstaben. Die analytische Unterscheidung von Strahl- oder Achsenkoordinaten erfolgt durch den Strich. Indem wir nun durchweg Koordinaten von Ebenen mit Strich, Koordinaten von Punkten ohne Strich schreiben, wird eine gleichmäßige Schreibweise erreicht. Jede Summe u_x' mit invariantem Charakter enthält dann ein gestrichenes und ein ungestrichenes Symbol. Hierdurch erklärt es sich auch, daß wir die Ebenenkoordinaten mit u_i' und nicht mit u_i schlechtweg bezeichneten; ferner, daß wir z. B. auf S. 2 für die Gleichung eines Kegelschnittes $a_x'^2 = 0$ schrieben und nicht wie gewöhnlich $a_x^2 = 0$.

Durch diese Schreibweise wird ferner bewirkt, daß in einem Determinantenfaktor $(a\,b\,c\,d)$ nur gleichartige Größen vorkommen, d. h. entweder lauter gestrichene oder ungestrichene. Eine Determinante der Form $(a'bcd)$ wird in unseren Rechnungen nie auftreten.

Die Bedingung, daß ein Punkt x in einer Ebene u' liegt, drücken wir analytisch durch $u'_x \equiv x_{u'} = 0$ aus. Es ist dies für variable x die Gleichung der Ebene u', für variable u' die Gleichung des Punktes x.

Es seien x, y und z drei Punkte. Die Geraden (xy) und (zy) haben die Koordinaten

$$p_{ik} = (xy)_{ik}$$
$$q_{ik} = (zy)_{ik} .$$

Da nun $(xyzy) \equiv 0$ ist, so wird auch

$$\Sigma(xy)_{ik}(zy)_{mn} \equiv 0 \qquad \text{oder} \qquad \Sigma p_{ik} q_{mn} = 0 ,$$

also die Bedingung, daß sich zwei Gerade p^2 und q^2 schneiden

(31) $$\underline{p^2_{q'} \equiv q^2_{p'} = 0 .}$$

Läßt man hier q_{ik} variabel, aber stets so, daß $q^2_{q'} \equiv 0$, daß also durch die sechs Größen q_{ik} eine Gerade dargestellt erscheint, so wird, wenn wir π statt q schreiben:

(32) $$\underline{\pi^2_{p'} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \pi'^2_{p} = 0 ,}$$

die „Gleichung" der Geraden p^2. Sie erscheint also dargestellt durch die Gesamtheit der sie schneidenden Geraden.

So schneidet z. B. π^2 die Linie (xy), wenn

$$\Sigma \pi_{ik}(xy)_{ik} = 0$$

ist oder nach (18)

(33) $$\underline{\pi'_x \pi'_y = 0 .}$$

Dies ist die Gleichung der Geraden (xy). Ebenso wird die Gleichung der Schnittlinie zweier Ebenen u' und v' in der zu (33) dualen Form:

(34) $$\underline{\pi_{u'} \pi_{v'} = 0 .}$$

Hierdurch erklärt sich auch das auf S. 8 über die duale Form von Gleichungen Gesagte, man vertauscht gestrichene und ungestrichene Symbole. In dieser Vertauschung liegt das analytische Aussprechen eines dualen Satzes.

Läßt man in (33) x veränderlich und setzt $\pi^2 = p^2$ als konstant voraus, so ist

(35) $$\underline{p'_x p'_y = 0}$$

die Gleichung der Ebene $(p^2 y)$. Ebenso ist

(36) $$\underline{p_{u'} p_{v'} = 0}$$

die Gleichung des Schnittpunktes der Ebene v' mit p^2.

Wir geben nun im folgenden einige einfache Beispiele aus der analytischen Geometrie des Raumes, die die große Ökonomie und Eleganz der Rechnung mit Komplexsymbolen zeigen sollen.

1. Es seien p^2, q^2 und y gegeben. Es soll die Gleichung jener Geraden durch y gefunden werden, welche p^2 und q^2 schneidet.

Sind u' und v' die Ebenen $(p^2 y)$ und $(q^2 y)$, so ist $\pi_{u'} \pi_{v'} = 0$ die Gleichung der gesuchten Geraden. Nun ist nach (35) für die u'_i und v'_i zu setzen: $p'_i p'_y$ und $q'_i q'_y$, so daß also die Gleichung der gesuchten Geraden wird:

(37) $$\underline{\pi_{p'} \pi_{q'} p'_y q'_y = 0\,.}$$

Ebenso erhält man dual die Gleichung der Verbindungslinie der Schnittpunkte von v' mit p^2 und q^2:

(38) $$\underline{\pi'_p \pi'_q p_{v'} q_{v'} = 0\,.}$$

Zu diesen Gleichungen gelangt man noch auf folgendem Wege, wobei wir uns nur auf (37) beschränken. Die drei Ebenen u', v', w' mit den Koordinaten $p'_i p'_y$, $q'_i q'_y$ und $\pi'_i \pi'_y$ müssen durch die gesuchte Gerade gehen; der Schnittpunkt $(u' v' w')$ ist dann unbestimmt, d. h. es ist

$$(u' v' w' \sigma') = 0\,,$$

wo σ' ganz beliebig ist. Es wird also

$$(p' q' \pi' \sigma') p'_y q'_y \pi'_y \equiv 0\,,$$

woraus nach (25) wird, da $p'^2_y \equiv 0$ und $q'^2_y \equiv 0$ ist:

$$(p' q' \pi' \pi') p'_y q'_y \cdot \sigma'_y = 0\,,$$

also da $\sigma'_y \gtrless 0$, erhält man

$$(p' q' \pi' \pi') p'_y q'_y = 0\,,$$

was nach (18) auf (37) führt.

Nimmt man in (37) π^2 als gegeben an und läßt y veränderlich sein, so liegt y auf einer Geraden, die p^2, q^2 und π^2 schneidet. Es ist also $\pi_{p'}\pi_{q'}p'_y q'_y = 0$ die Gleichung der durch p^2, q^2 und π^2 gegebenen Regelfläche 2. Ordnung; ihre Gleichung in Ebenenkoordinaten ist nach (38):

$$\pi'_p \pi'_q p_{u'} q_{u'} = 0\,.$$

Sowohl (37) als auch (38) sind nur scheinbar in p^2, q^2 und π^2 unsymmetrisch. Durch Anwendung von (26) wird aber

$$\pi_{p'}\pi_{q'}p'_y q'_y = -p_{\pi'}p_{q'}\pi'_y q'_y\,.$$

2. Es sei $a'^2_x = 0$ eine Fläche 2. Ordnung F_2. Der Schnittpunkt der Ebene u' mit p^2 hat die Koordinaten $p_i p_{u'}$; er liegt auf F_2, wenn

$$\text{(39)} \qquad \underline{a'_p a'_q p_{u'} q_{u'} = 0}$$

ist. Ist hier $p^2 = q^2$ konstant, so ist dies die Gleichung der Treffpunkte von p^2 mit F_2. Für konstante u' ist (39) die Gleichung der Schnittkurve von u' mit F_2.

3. Zwei Punkte y und z haben bezüglich $a'^2_x = 0$ die Polarebenen $a'_y a'_x = 0$ und $a'_z a'_x = 0$; deren Schnittlinie wird

$$\pi_{a'}\pi_{b'}a'_y b'_z = 0\,,$$

oder durch Vertauschung und für $(y\,z) = p^2$

$$\tfrac{1}{2}\pi_{a'}\pi_{b'}(a'_y b'_z - a'_z b'_y) = 0\,,$$

$$\tfrac{1}{2}\pi_{a'}\pi_{b'}(a'\,b')_{(yz)} = 0\,,$$

$$\text{(40)} \qquad \underline{\pi^2_{q'} \equiv \pi_{a'}\pi_{b'}p_{a'}p_{b'} = 0\,.}$$

Dies ist die zu p^2 bezüglich F_2 konjugierte Polare q^2; sie schneidet p^2 für $p^2_{q'} = 0$, d. h. es wird

$$\text{(41)} \qquad \underline{\pi_{a'}\pi_{b'}\varrho_{a'}\varrho_{b'} = 0}$$

die Gleichung von F_2 in Linienkoordinaten. Will man in (41) gestrichene Koordinaten, so wird nach (18)

$$(\pi'\,\pi'\,a'\,b')\,(\varrho'\,\varrho'\,a'\,b') = 0\,.$$

4. Es seien $F_2 \equiv a'^2_x = 0$ und $\Phi_2 \equiv \alpha'^2_x = 0$ zwei Flächen 2. Ordnung. Für die Schnittpunkte $\varkappa_1 x + \varkappa_2 y$

der Geraden $p^2 = q^2 = r^2 = (xy)$ mit F_2 und Φ_2 ergeben sich die beiden quadratischen Gleichungen:

$$\varkappa_1^2 a_x'^2 + 2\varkappa_1\varkappa_2 a_x' a_y' + \varkappa_2^2 a_y'^2 = 0,$$
$$\varkappa_1^2 \alpha_x'^2 + 2\varkappa_1\varkappa_2 \alpha_x' \alpha_y' + \varkappa_2^2 \alpha_y'^2 = 0.$$

Die Invarianten dieser beiden Formen sind:

$$D_{11} = a_x'^2 b_y'^2 - a_x' a_y' b_x' b_g' = 2 p_{a'} p_{b'} q_{a'} q_{b'},$$
$$D_{22} = \alpha_x'^2 \beta_y'^2 - \alpha_x' \alpha_y' \beta_x' \beta_y' = 2 p_{\alpha'} p_{\beta'} q_{\alpha'} q_{\beta'},$$
$$D_{12} = a_x'^2 \alpha_y'^2 - 2 a_x' a_y' \alpha_x' \alpha_y' + \alpha_x'^2 a_y'^2 = 4 p_{a'} p_{\alpha'} q_{a'} q_{\alpha'}:$$

Hier geben D_{11} und D_{22} gleich Null gesetzt F_2 und Φ_2 in Linienkoordinaten. Ist $D_{12} = 0$, so liegen die vier Schnittpunkte harmonisch; solche Geraden (yz) bilden dann den quadratischen Komplex:

(42) $$\underline{\pi_{a'} \pi_{\alpha'} \varrho_{a'} \varrho_{\alpha'} = 0.}$$

Fallen von den vier Schnittpunkten zwei zusammen, die zu verschiedenen Flächen gehören, so ist

$$D_{11} D_{12} - D_{12}^2 = 0,$$

somit wird die Gleichung der Schnittkurve von F_2 und Φ_2 in Linienkoordinaten

(43) $$\underline{p_{a'} p_{b'} q_{a'} q_{b'} r_{\alpha'} r_{\beta'} s_{\alpha'} s_{\beta'} - p_{a'} p_{\alpha'} q_{a'} q_{\alpha'} r_{b'} r_{\beta'} s_{b'} s_{\beta'} = 0.}$$

Sie erscheint als besonderer Komplex 4. Grades.

5. Schneiden sich p^2 und q^2, so bietet sich die Aufgabe den Schnittpunkt und die Ebene $(p^2 q^2)$ zu ermitteln.

Ist y ein beliebiger Punkt des Raumes, so hat die Ebene $(p^2 y)$ die Gleichung $p_x' p_y' = 0$, q^2 schneidet sie im gesuchten Punkte:

(44) $$\underline{q_{u'} q_{p'} p_y' = 0;}$$

y ist hierbei ganz willkürlich. Dual erhält man die gesuchte Ebene $(p^2 q^2)$:

(45) $$\underline{q_x' q_p' p_{v'} = 0.}$$

6. Es seien p^2, q^2 und r^2 drei Gerade, welche sich gegenseitig schneiden; also $p_{q'}^2 = p_{r'}^2 = q_{r'}^2 = 0$. Sie können nun entweder in einer Ebene liegen, oder durch einen Punkt gehen. Wir suchen hierfür das analytische Kenn-

zeichen. Liegen alle drei Geraden in einer Ebene, so können wir die Gleichung derselben aus zweien der Geraden, etwa p^2 und q^2, finden nach (45). Der Schnittpunkt von r^2 mit dieser Ebene $(p^2 q^2)$ wird dann unbestimmt, d. h.

$$r_{u'} r_{q'} q'_p p_{v'} \equiv 0. \tag{46}$$

Dual gehen p^2, q^2 und r^2 durch denselben Punkt, wenn

$$r'_x r'_q q_{p'} p'_y \equiv 0 \tag{47}$$

ist. Sind beide Bedingungen erfüllt, so gehören p^2, q^2 und r^2 demselben Büschel an und es ist, wie unten gezeigt wird, $\mu p_{ik} = q_{ik} + \lambda r_{ik}$.

3. Der lineare Komplex.

Die Gleichung der Geraden p^2 war $\pi^2_{p'} \equiv \pi'^2_p = 0$. Zwischen den p_{ik} besteht die Gleichung $p^2_{p'} = 0$. Lassen wir diese fallen und schreiben a statt p, wobei die a jetzt Komplexsymbole sind, so ist durch

$$K_a \equiv \pi^2_{a'} \equiv \pi'^2_a = 0 \tag{48}$$

ein linearer Komplex K_a dargestellt. Wir bezeichnen weiterhin mit K_1 den Ausdruck „linearer Komplex".

Ist $a^2_{a'} = A_{11} = 0$, so ist K_a speziell, a^2 ist seine Achse.

Soll (xy) dem K_a angehören, so muß

$$E_y \equiv a'_x a'_y = 0 \tag{49}$$

sein. E_y ist die zu y konjugierte Ebene oder Nullebene. Ebenso entspricht jeder Ebene v' ein Punkt

$$P_{v'} \equiv a_{u'} a_{v'} = 0. \tag{50}$$

Nehmen wir statt v' in (50) E_y, so muß $P_{v'}$ mit y identisch sein, wenn diese Komplexverwandtschaft (Nullsystem) umkehrbar sein soll. Es wird dann:

$$E_y = a_{u'} a_{b'} b'_y = 0$$

oder nach (27)

$$-\tfrac{1}{4} A_{11} \cdot u'_y = 0,$$

d. h. man erhält nur dann wieder y, wenn $A_{11} \gtrless 0$, also K_a nicht speziell ist.

Auch auf folgende Weise kommen wir zu diesem Resultat. Das Nullsystem wird durch die Gleichungen $\lambda u_i' = a_i' a_y'$ ausgedrückt und ist dann umkehrbar, wenn die Determinante $D = |a_{ik}'|$ der Koeffizienten rechts nicht verschwindet. Es ist nun

$$D = |a_{ik}'| = \tfrac{1}{24}(a'b'c'd')^2 ,$$

also nach (29)

(51) $$\underline{D = \tfrac{1}{16} A_{11}^2 .}$$

Sind y und z zwei Punkte auf p^2, so schneiden sich E_y und E_z längs der zu p^2 bezüglich des K_a konjugierten Geraden G_{p^2}. Da

$$E_y \equiv a_x' a_y' = 0 \qquad \text{und} \qquad E_z \equiv a_x' a_z' \equiv b_x' b_z' = 0$$

ist, so wird nach (34)

$$G_{p^2} \equiv \pi_{a'} \pi_{b'} a_y' b_z' = \tfrac{1}{2} \pi_{a'} \pi_{b'} (a_y' b_z' - b_y' a_z')$$

(52) $$\underline{G_{p^2} \equiv \pi_{a'} \pi_{b'} p_{a'} p_{b'} = 0 .}$$

Man bemerkt die große Analogie mit (40), nur sind hier die a' und b' Komplexsymbole.

Durch die zu (52) duale Gleichung erhält man ebenfalls für G_{p^2}: $\pi_a' \pi_b' p_a' p_b' = 0$, was mit (52) identisch ist.

Wir formen nun (52) mittels (26) um. Es wird

$$\pi_{a'} \pi_{b'} a_p' b_p' = -a_{\pi'} a_{b'} \pi_p' p_{b'} + \tfrac{1}{2} \pi_{a'}^2 p_{b'}^2 ;$$

hier wird das erste Glied rechts nach (27) $= -\frac{1}{4} A_{11} \pi_{p'}^2$, also erhält man

(53) $$\underline{G_{p^2} \equiv -\tfrac{1}{4} A_{11} \cdot \pi_{p'}^2 + \tfrac{1}{2} \pi_{a'}^2 \cdot p_{a'}^2 .}$$

Also: „G_{p^2} gehört einem Komplexbüschel an, welches durch p^2 und K_a bestimmt wird". Für $A_{11} = 0$ erhält man:

„Die Achse eines speziellen K_a ist konjugiert zu allen Geraden." Soll p^2 ihre konjugierte G_{p^2} schneiden, so muß für $p^2 = q^2$ der Ausdruck $q_{a'} q_{b'} p_{a'} p_{b'}$ verschwinden, oder es muß

$$\tfrac{1}{4} A_{11} p_{p'}^2 - \tfrac{1}{2} p_{a'}^2 p_{b'}^2 = 0 ,$$

d. h. $p_{a'}^2 = 0$ sein. Ist dies aber der Fall, so wird nach (53)

$$G_{p^2} = \tfrac{1}{4} A_{11} \pi_{p'}^2 = 0 ,$$

d. h. „Jede Komplexgerade ist ihre eigene Konjugierte."

4. Die lineare Kongruenz.

Zwei lineare Komplexe K_a und K_α bestimmen ein Büschel (K_a, K_α): $\varkappa_1 K_a + \varkappa_2 K_\alpha = 0$. Die ∞^2 Geraden, welche allen $K_\varkappa$ angehören, bilden eine lineare Kongruenz $C_{a,\alpha}$ (Netz), den „Schnitt" von K_a und K_α. Ein Komplex $K_\varkappa$ des Büschels (K_a, K_α) sei

$$\underline{K_\varkappa \equiv \varkappa_1 \pi_{a'}^2 + \varkappa_2 \pi_{\alpha'}^2 = 0\,.} \tag{54}$$

Seine Invariante $A_{\varkappa\varkappa}$ wird:

$$\underline{A_{\varkappa\varkappa} = \varkappa_1^2 A_{11} + 2\varkappa_1\varkappa_2 A_{12} + \varkappa_2^2 A_{22}\,.} \tag{55}$$

Hierbei ist $a_{\alpha'}^2 = \alpha_{a'}^2 = A_{12}$ die simultane Invariante beider Komplexe.

Im Büschel (K_a, K_α) gibt es also für $A_{\varkappa\varkappa} = 0$ im allgemeinen zwei spezielle Komplexe, deren Achsen die Leitlinien der $C_{a,\alpha}$ sind. Aus (55) folgt für $A_{\varkappa\varkappa} = 0$

$$\varkappa_1^2 A_{11} + 2\varkappa_1\varkappa_2 A_{12} + \varkappa_2^2 A_{22} = 0$$

$$\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = \frac{1}{A_{11}}\left(-A_{12} \pm \sqrt{A_{12}^2 - A_{11}A_{22}}\right),$$

so daß die Gleichungen der Leitlinien werden:

$$\underline{\left(-A_{12} \pm \sqrt{D}\right)\pi_{a'}^2 + A_{11}\pi_{\alpha'}^2 = 0} \tag{56}$$

für $D = A_{12}^2 - A_{11}A_{22}$. (56) ist nur scheinbar bezüglich K_a und K_α unsymmetrisch. D ist die Diskriminante der Kongruenz. Ist $D = 0$, so fallen die Leitlinien zusammen, die $C_{a,\alpha}$ ist parabolisch.

Es seien $K_a + \lambda_1 K_\alpha = 0$ und $K_a + \lambda_2 K_\alpha = 0$ die Leitlinien. Sie schneiden sich, wenn

$$\Sigma(a'_{ik} + \lambda_1 \alpha'_{ik})(a'_{mn} + \lambda_2 \alpha'_{mn}) = 0$$

wird, oder für

$$A_{11} + A_{12}(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 A_{22} = 0\,.$$

Nun sind λ_1 und λ_2 aus (55) die Wurzeln, also

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2\frac{A_{12}}{A_{22}}, \qquad \lambda_1\lambda_2 = \frac{A_{11}}{A_{22}},$$

somit erhält man als Bedingung

$$-A_{12}^2 + A_{11}A_{22} = -D = 0\,,$$

d. h.: „Der Fall von zwei getrennten, sich schneidenden Leitlinien kommt nicht vor, wenn nicht alle $K_\varkappa$ speziell sind. Die Leitlinien fallen entweder zusammen oder haben keinen Punkt gemeinsam.“

Ein weiterer, neuer Fall tritt ein für $A_{11} = A_{12} = A_{22} = 0$, d. h. K_a und K_α sind speziell und ihre Achsen schneiden sich. Dann verschwindet jedes $A_{\varkappa\varkappa}$; alle $K_\varkappa$ sind speziell und ihre Achsen schneiden die von K_a und K_α. Es können nun die drei Achsen von K_a, K_α, $K_\varkappa$ entweder durch denselben Punkt gehen oder in derselben Ebene liegen. Das Kennzeichen dafür gibt (46) und (47). Es wird z. B. (46) für K_a, K_α und $K_\varkappa$ gebildet:

$$Q = \varkappa_1 a_{u'} a_{b'} b'_\alpha \alpha_{v'} + \varkappa_2 \alpha_{u'} \alpha_{b'} b'_\beta \beta_{v'} = \varkappa_1 Q_1 + \varkappa_2 Q_2 .$$

Q_1 enthält nach (27) den Faktor A_{11}, also $Q_1 \equiv 0$, dann ist nach (26)

$$\begin{aligned} Q_2 &= -\alpha_{a'} \alpha_{u'} a'_\beta \beta_{v'} = +a_{\alpha'} a_{u'} \alpha'_\beta \beta_{v'} - \tfrac{1}{2} A_{12} \beta_{u'} \beta_{v'} \\ &= a_{\alpha'} a_{u'} \alpha'_\beta \beta_{v'} \end{aligned}$$

und dies enthält nach (27) den Faktor A_{22}, somit ist auch $Q_2 \equiv 0$ und daher $Q \equiv 0$. Ebenso findet man, daß (47) für K_a, K_α und $K_\varkappa$ identisch verschwindet. Die Achsen der $K_\varkappa$ bilden also ein ebenes Strahlenbüschel. $K_\varkappa \equiv \varkappa_1 \pi^2_{a'} + \varkappa_2 \pi^2_{\alpha'} = 0$ ist dann speziell und stellt eine Gerade r^2 dar, deren Koordinaten $r'_{ik} = \varkappa_1 a'_{ik} + \varkappa_2 \alpha'_{ik}$ werden. Die $C_{a,\alpha}$ ist singulär. Somit haben wir bei einer $C_{a,\alpha}$ drei wesentlich verschiedene Arten: 1. allgemeine $C_{a,\alpha}$, 2. parabolische und 3. singuläre Kongruenz.

Ist y ein Punkt, so bilden die E_y bezüglich der $K_\varkappa$ ein Büschel. Eine Ebene desselben hat nach (49) und (54) die Gleichung

$$E_y^{(\varkappa)} \equiv \varkappa_1 a'_x a'_y + \varkappa_2 \alpha'_x \alpha'_y = \varkappa_1 E_y^{(a)} + \varkappa_2 E_y^{(\alpha)} = 0$$

mit der Achse $\pi_{a'} \pi_{\alpha'} a'_y \alpha'_y = 0$, welche am einfachsten als Schnitt von $E_y^{(a)}$ und $E_y^{(\alpha)}$ erhalten wird. Das Doppelverhältnis der vier Ebenen $E_y^{(a)}$, $E_y^{(\alpha)}$, $E_y^{(\varkappa)}$, $E_y^{(\lambda)}$ wird

$$\varepsilon = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} : \frac{\lambda_2}{\lambda_1} .$$

Sind $K_\varkappa$ und K_λ die Leitlinien, so wird

$$\varepsilon = \frac{-A_{12} + \sqrt{D}}{-A_{12} - \sqrt{D}},$$

also von y unabhängig.

Ist $A_{12} = 0$, so wird $\varepsilon = -1$, die Komplexe liegen involutorisch. Demgemäß kann man auch sagen:

„Zwei spezielle K_1 liegen involutorisch, wenn sich ihre Achsen schneiden.“

„Ein allgemeiner K_1 und ein spezieller K_1 liegen involutorisch, wenn die Achse des letzteren dem ersteren angehört.“

„Ein K_1 ist speziell, wenn er mit sich selbst involutorisch ist.“

Wir kommen im Abschnitte über Komplexsysteme noch näher auf die Kongruenzen zurück und werden insbesondere für die linearen Kongruenzen besondere Koordinaten einführen. Hier sei noch folgende Aufgabe gelöst: Wann schneiden sich die zu p^2 bezüglich K_a und K_α konjugierten Geraden G_{p^2} und G'_{p^2}? Es ist

$$G_{p^2} \equiv \pi_{a'} \pi_{b'} p_{a'} p_{b'} = 0,$$

$$G'_{p^2} \equiv \pi_{\alpha'} \pi_{\beta'} q_{\alpha'} q_{\beta'} = 0$$

und die Bedingung, daß sich beide schneiden werden,

$$(a' b' \alpha' \beta') p_{a'} p_{b'} q_{\alpha'} q_{\beta'} = 0,$$

mittels (26) und (27) umgeformt erhält man den quadratischen Komplex:

$$\text{(57)} \qquad \underline{K_a^2 A_{22} - 2 A_{12} K_a K_\alpha + K_\alpha^2 A_{11} = 0}.$$

Bilden wir aus (56) das Produkt der beiden Leitlinien, so kommen wir auf dieselbe Gleichung. Die gesuchten Geraden bilden daher einen besonderen quadratischen Komplex, der aus den Treffgeraden der beiden Leitlinien gebildet wird.

Bei einer parabolischen $C_{a,\alpha}$ wird (57) ein vollständiges Quadrat; bei einer singulären $C_{a,\alpha}$ genügt jede Gerade der gestellten Bedingung.

5. Drei lineare Komplexe.

Die drei K_1 seien: $K_1 \equiv K_a$, $K_2 \equiv K_\alpha$, $K_3 \equiv K_m$. Alle Geraden, welche dem Systeme

$$\Sigma = \varkappa_1 K_1 + \varkappa_2 K_2 + \varkappa_3 K_3 = 0$$

angehören, bilden die eine Regelschar S_1 einer Fläche 2. Ordnung $\mathfrak{F}_2$. Die andere Schar S_2 wird von den Achsen der speziellen K_1 des Systems Σ gebildet. Die Gleichung einer solchen Achse ist

$$\underline{\varkappa_1 K_1 + \varkappa_2 K_2 + \varkappa_3 K_3 = 0} \tag{58}$$

mit der Bedingung:

$$\underline{\Sigma \varkappa_i^2 A_{ii} + 2 \Sigma \varkappa_i \varkappa_k A_{ik} = 0\,.} \tag{59}$$

Eine Gerade p^2 schneidet eine Erzeugende der Schar S_2, wenn nach (58):

$$\varkappa_1 p^2_{a'} + \varkappa_2 p^2_{\alpha'} + \varkappa_3 p^2_{m'} = 0$$

ist. Dies gibt mit (59) zwei Werte für $\varkappa_i$, wie es sein muß, da p^2 die $\mathfrak{F}_2$ in zwei Punkten trifft und durch jeden dieser eine Erzeugende von S_2 geht. Die beiden Lösungen fallen zusammen, wenn $p^2 = \pi^2$ die F_2 tangiert. Wir erhalten also die Linienkoordinatengleichung Ψ_2 von $\mathfrak{F}_2$ in der Form:

$$\Psi_2 \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & K_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & K_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & K_3 \\ K_1 & K_2 & K_3 & 0 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{60}$$

Die Forderung, daß die drei, dem Punkte x bezüglich K_1, K_2, K_3 konjugierten Ebenen demselben Büschel angehören, gibt die Gleichung von F_2 in Punktkoordinaten [vgl. (38)]:

$$\underline{F_2 = a_{\alpha'} a_{m'} \alpha'_x m'_x = 0\,.} \tag{61}$$

Dual wird die Gleichung in Ebenenkoordinaten:

$$\underline{\Phi_2 = a'_\alpha a'_m \alpha_{u'} m_{u'} = 0\,.} \tag{62}$$

Gehen wir von $\mathfrak{F}_2$ aus, so muß Φ_2 die Koeffizienten von $\mathfrak{F}_2$ im dritten Grade enthalten; wir sollten also in (62) noch einen Faktor M hinzufügen, der in den Koeffizienten von F_2 quadratisch ist. Wir schreiben nun statt $\Phi_2 \ldots M\Phi_2$ und bilden die Diskriminante von $\mathfrak{F}_2$ nach der Formel

$$D = \frac{1}{4} \sum \sum \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_i \, \partial x_k} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial u_i' \, \partial u_k'} .$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} 4\,D &= M \Sigma \Sigma\, a_\alpha' \, a_m' \, b_\beta' \, b_n' (\alpha_i \, m_k + \alpha_k \, m_i)\,(\beta_i' \, n_k' + \beta_k' \, n_i') \\ &= 2\,M\, a_\alpha' \, a_m' \, b_\beta' \, b_n' (\alpha_{\beta'} \, m_{n'} + \alpha_{n'} \, m_{\beta'}) \\ 2\,D &= J_1 + J_2 \,; \end{aligned}$$

hier können wir J_1 und J_2 durch Anwendung von (26) und (27) durch die A_{ii} und A_{ik} ausdrücken. Wir unterlassen hier diese Umformung, da wir später allgemein darauf zurückkommen.

Setzt man

$$\Delta = |A_{ik}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} ,$$

so wird

$$D = \frac{M}{16} \cdot \Delta .$$

Um nun M zu bestimmen, leiten wir Φ_2 direkt aus F_2 ab. Ist $\mathfrak{F}_2' \equiv g_x'^2 = 0$, so wird $\Phi_2' = (g'h'i'v')^2 = 0$. Hierbei sind $g' = h' = i'$ gewöhnliche Symbole. Nun liegt aber $\mathfrak{F}_2$ in (61) nicht in dieser Form $g_x'^2 = 0$ vor. Wir können jedoch Φ_2 für $\mathfrak{F}_2$ aus $(g'h'i'v')^2$ derart ableiten, daß wir nach und nach für g_{ik}', h_{ik}' und i_{ik}' setzen:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_i' \, m_k' + \alpha_k' \, m_i') \, a_{\alpha'} \, a_{m'} ,$$

denn es ist ja

$$F_2 = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial F_2'}{\partial g_{ik}'} (\alpha_i' \, m_k' + \alpha_k' \, m_i') \, a_{\alpha'} \, a_{m'} .$$

So erhalten wir

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} &\underline{\Phi_2 = 2[(\alpha'\beta'\gamma'v')\,(m'n'l'v')} \\ &\underline{+ 3(\alpha'\beta'l'v')\,(m'n'\gamma'v')]\, a_{\alpha'} \, Q_{m'} \, b_{\beta'} \, b_{n'} \, c_{\gamma'} \, c_{l'} .} \end{aligned} \right.$$

Nach weiterer Reduktion bei Anwendung der Gleichungen (25), (26) und (27) wird

$$\Phi_2 = 16\, \varDelta\, a'_\alpha\, a'_m\, \alpha_{u'}\, m_{u'} \,,$$

somit ist $M = 16\, \varDelta$ und

$$\underline{D = \varDelta^2 \,.} \tag{64}$$

Ist $\varDelta = 0$, also auch $D = 0$, so wird wegen (60) Ψ_2 ein vollständiges Quadrat. $\mathfrak{F}_2$ ist ein Ebenenpaar mit einem auf der Achse liegenden Punktepaar Φ_2, ein Kegel oder Kegelschnitt kann als Entartung nicht auftreten.

Sind die $3\, K_i$ speziell, so wird $D = 4\, A_{12}^2\, A_{23}^2\, A_{31}^2$. $\mathfrak{F}_2$ bzw. Φ_2 degeneriert also nur, wenn sich die Achsen von zweien der K_i schneiden. Lassen wir von den $3\, K_i$ etwa K_m veränderlich, aber speziell sein, so wird die Bedingung $\varDelta = 0$ zu

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & K_1 \\ A_{21} & A_{22} & K_2 \\ K_1 & K_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \,,$$

was auf (57) führt. K_m schneidet also dann eine Leitlinie der Kongruenz $C_{a,\alpha}$.

6. Vier lineare Komplexe.

Da drei von den $4\, K_i$ (K_a, K_α, K_m, K_g) eine $\mathfrak{F}_2$ bestimmen, so untersuchen wir zuerst die Beziehungen eines K_1 zu einer $\mathfrak{F}_2$. Es sei

$$K_m = \pi_{m'}^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad F_2 = a_x'^2 = 0$$

gegeben, wo a'_i jetzt gewöhnliche Symbole sind.

Ist p^2 eine Gerade, so ist ihre Polare bezüglich F_2 nach (40): $\pi_{a'}\, \pi_{b'}\, p_{a'}\, p_{b'} = 0$. Sie gehört K_m an, wenn $m_{a'}\, m_{b'}\, p_{a'}\, p_{b'} = 0$ ist, somit wird

$$\underline{K'_m \equiv \pi_{a'}\, \pi_{b'}\, m_{a'}\, m_{b'} = 0} \tag{65}$$

die Gleichung des zum K_m bezüglich $\mathfrak{F}_2$ polarkonjugierten Komplexes. Dessen Invariante A'_{mm} wird

$$A'_{mm} = \tfrac{1}{2}(a'b'c'd')\, a'_m\, b'_m\, c'_n\, d'_n = \tfrac{1}{48}(a'b'c'd')^2\, (m\, m\, n\, n)$$
$$= A \cdot A_{mm} \,,$$

wenn $A = \frac{1}{24}(a'b'c'd')^2$ gesetzt wird. K'_m ist also speziell, wenn K_m speziell ist oder wenn F_2 degeneriert.

K_m um K'_m bestimmen eine Kongruenz. Da die simultane Invariante B von K_m und $K_{m'}$ gleich $m_{a'} m_{b'} n_{a'} n_{b'}$ ist, so erhält man für die Leitlinien L_1 und L_2:

(66) $$\underline{A_{mm} + 2\lambda B + \lambda^2 A\, A_{mm} = 0\,.}$$

L_1 und L_2 sind konjugiert bezüglich F_2; sie schneiden F_2 in vier Punkten, welche miteinander verbunden die vier Erzeugenden liefern, welche K_m (und K'_m) angehören. Jede Erzeugende von $\mathfrak{F}_2$ hat bezüglich K_m eine konjugierte Gerade. Diese bilden die zu $\mathfrak{F}_2$ bezüglich K_m konjugierte Fläche 2. Ordnung. Für deren Gleichung in Ebenenkoordinaten erhält man leicht $\Phi'_2 \equiv a'_m\, a'_n\, m_{v'}\, n_{v'} = 0$. Φ'_2 und F_2 schneiden sich nach den vier, dem K_2 und der $\mathfrak{F}_2$ gemeinsamen Geraden.

Ohne auf Spezialfälle weiter einzugehen, behandeln wir noch kurz den Fall, daß die Wurzeln von (66) gleich sind; dann ist

(67) $$\underline{C = B^2 - A\, A_{mm}^2 = 0\,.}$$

Wir nehmen nun statt $\mathfrak{F}_2$ die von K_1, K_2 und K_3 bestimmte Fläche $\mathfrak{F}_4$ und setzen $K_m = K_4$. B gehe dann über in Π_4. Dann kommt statt (67) wegen (64)

(68) $$\underline{\Pi_4^2 - A_{44}^2\, \Delta_4^2 = 0\,.}$$

Hier ist Δ_4^2 die Diskriminante von $\mathfrak{F}_4$. Die auf $\mathfrak{F}_4$ von den gemeinsamen Linien gebildete Schar sei S_1, die andere, welche von den Achsen der speziellen Komplexe $\varkappa_1 K_1 + \varkappa_2 K_2 + \varkappa_3 K_3 = 0$ gebildet wird, S_2. Von den vier Geraden, welche $\mathfrak{F}_4$ und K_4 gemeinsam haben, gehören zwei zu S_1 und zwei zu S_2. Es gibt also im allgemeinen zwei Gerade, welche $4\,K_i$ angehören; sie seien L_1 und L_2. L_1 und L_2 gehören der Schar S_1 an, können sich daher nie schneiden, sondern höchstens zusammenfallen. Dieser Fall muß in dem allgemeinen, durch (68) gegebenen, enthalten sein. Es können aber auch die beiden anderen Erzeugenden, welche S_2 angehören, zusammenfallen, dann muß (68) ebenfalls erfüllt sein. Tatsächlich zerfällt (68) in zwei Faktoren.

$$\underline{\Delta = \Pi_4 + A_{44}\Delta_4 = 0\,,} \tag{69}$$

$$\underline{\Gamma_4 = \Pi_4 - A_{44}\Delta_4 = 0\,.} \tag{70}$$

Nach (65) erhält man Π_4, wenn man in der Linienkoordinatengleichung von $\mathfrak{F}_4$ statt $\pi^2 \ldots g^2$ einsetzt. Also wird nach (60)

$$\Pi_4 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & 0 \end{vmatrix} = \Delta - A_{44}\Delta_4\,.$$

Es ist nun leicht zu zeigen, daß $\Pi_4 = 0$ den Fall kennzeichnet, wo die beiden in S_2 enthaltenen Erzeugenden von $\mathfrak{F}_4$ zusammenfallen. Für diese Erzeugenden bestehen die Gleichungen

$$\varkappa_1 K_2 + \varkappa_2 K_2 + \varkappa_3 K_3 = 0\,,$$

$$\Sigma \varkappa_i^2 A_{ii} + 2\,\Sigma \varkappa_i \varkappa_k A_{ik} = 0\,,$$

$$\varkappa_1 A_{14} + \varkappa_2 A_{24} + \varkappa_3 A_{34} = 0\,.$$

Die Elimination der $\varkappa_i$ führt dann auf Π_4. Ist $\Delta = 0$, so fallen die zwei Geraden, welche allen $4\,K_i$ angehören, zusammen.

7. Fünf und sechs Komplexe.

Die Forderung, daß ein K_1 mit einem K_a involutorisch liegt, ist einer Bedingung äquivalent. Sind daher $5\,K_1$ gegeben, z. B. K_a, K_α, K_m, K_g und K_l, so erhält man einen einzigen K_1, welcher mit allen $5\,K_i$ involutorisch liegt. Setzt man

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{23} & a_{34} & a_{42} \\ \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \pi_{42} \end{vmatrix} = (a\,\alpha\,m\,g\,l\,\pi)\,,$$

so wird die Gleichung des mit den $5\,K_i$ involutorisch liegenden Komplexes:

$$(71) \qquad \underline{K_\pi \equiv (\pi\, a\, \alpha\, m\, g\, l) = 0\,.}$$

Da nun $(\pi\, a\, \alpha\, m\, g\, l) = -(\pi'\, a'\, \alpha'\, m'\, g'\, l')$, so erhält man, wenn man (71) mit $(\pi'\, a'\, \alpha'\, m'\, g'\, l')$ multipliziert und den Faktor 2^6 in das Produkt der Determinanten eingehen läßt:

$$(72) \qquad -K_\pi^2 = \frac{1}{2^6} \begin{vmatrix} 0 & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & K_5 \\ K_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ K_2 & A_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_3 & A_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_4 & A_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_5 & A_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{55} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Wir bezeichnen nun den Minor von 0 in (72) mit D und dessen vierreihige Minoren mit B_{ik}, dann wird statt (72);

$$(73) \qquad \underline{\Sigma\, K_i^2 B_{ii} - 2\,\Sigma\, K_i K_k B_{ik} = 0\,.}$$

Sind die K_i speziell, so ist dies [oder (72)] die Gleichung des durch fünf Gerade bestimmten Komplexes (zum Quadrat erhoben). Ferner folgt aus (72) die Bedingung, daß sechs Gerade demselben Komplexe angehören.

$$(74) \qquad \underline{|\,A_{11}\;\; A_{22}\;\; A_{33}\;\; A_{44}\;\; A_{55}\;\; A_{66}\,| = 0\,.}$$

Unter welcher Bedingung ist nun der durch (72) gegebene Komplex K_π speziell? Es sei

$$K_\pi = \tfrac{1}{2}\,\pi_{\varrho'}^2 = \Sigma\, \pi_{ik}\, \varrho'_{ik}\,,$$

dann wird nach (71), wenn wir den Proportionalitätsfaktor weglassen, z. B.

$$\varrho'_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{23} & a_{34} & a_{42} \\ \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & l_{42} \end{vmatrix},$$

$$\varrho'_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & a'_{23} & a'_{34} & a'_{42} \\ \alpha'_{12} & . & . & . & . & . \\ m'_{12} & . & . & . & . & . \\ g'_{12} & . & . & . & . & . \\ l'_{12} & . & . & . & . & l'_{42} \end{vmatrix} .$$

Also wird

$$\varrho_{12}\,\varrho'_{12} = -\frac{1}{2^5}\begin{vmatrix} 1 & a'_{12} & \alpha'_{12} & m'_{12} & g'_{12} & l'_{12} \\ 2\,a_{12} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ 2\,\alpha_{12} & A_{21} & . & . & . & . \\ 2\,m_{12} & A_{31} & . & . & . & . \\ 2\,g_{12} & A_{41} & . & . & . & . \\ 2\,l_{12} & A_{51} & . & . & . & A_{55} \end{vmatrix} .$$

Entwickelt man dies und summiert nach allen Indexpaaren, so wird:

$$\Sigma\,\varrho_{ik}\,\varrho'_{ik} = \tfrac{1}{2}\,\varrho^2_{\varrho'} = -\frac{1}{2^5}(D - \Sigma A_{ii} B_{ii} + 2\,\Sigma A_{ik} B_{ik}) .$$

Da nun

$$5\,D = 2\,\Sigma A_{ik} B_{ik} + \Sigma A_{ii} B_{ii} ,$$

so wird auch

$$\varrho^2_{\varrho'} = -\frac{1}{2^4}(6\,D - 2\,\Sigma A_{ii} B_{ii}) ;$$

K_ϱ ist speziell für

(75) $$\underline{3\,D - \Sigma A_{ii} B_{ii} = 0 .}$$

Sind alle K_i speziell, so wird die Bedingung, daß fünf Gerade eine Transversale zulassen:

(76) $$\underline{|A_{11}\ A_{22}\ A_{33}\ A_{44}\ A_{55}| = 0 .}$$

Lassen wir in (75) z. B. K_1 willkürlich, aber speziell, so gibt (75) die Gleichung der zwei den $4\,K_i$ gemeinsamen Geraden als speziellen Komplex 2. Grades. Sind die $4\,K_i$ speziell, so erhält die Gleichung der zwei die vier Geraden K_i schneidenden Transversalen:

$$(77)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & K_1 \\ A_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & K_2 \\ A_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & K_3 \\ A_{41} & \cdot & \cdot & A_{44} & K_4 \\ K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Verschwindet der Kern dieser Determinante, so wird (77) ein Quadrat, was mit früherem übereinstimmt. Eine der vier Geraden berührt dann die Regelfläche der drei anderen. Die Bedingung hierfür ist also:

$$(78)\qquad \underline{|A_{11}\ A_{22}\ A_{33}\ A_{44}| = 0} .$$

Verschwindet (77) identisch, so liegen die vier Geraden hyperbolisch.

8. Die Invarianten eines Komplexsystems.

Wir betrachten jetzt Ausdrücke, in welchen nur Komplexsymbole vorkommen. Dann können wir jeden invarianten Ausdruck auf Formen bringen, die aus Produkten mit $a_{b'}$ als Faktorentypus bestehen. Denn nach (18) und (25) kann jede Determinante $(a' b' c' d')$ oder $(a' a' b' c')$ in eine Summe von solchen Produkten zerlegt werden.

Wir haben uns daher im folgenden nur mit solchen Produkten $\Pi = a_{b'} a_{c'} b'_d \ldots$ zu befassen. Tritt in Π ein Faktor $a_{b'}$ auf, wo a und b gleichbedeutend sind, so sondert sich nach (27) der wirkliche Faktor $a^2_{b'}$ ab. Wir ordnen nun die in Π auftretenden Faktoren folgenderweise: Wir beginnen mit einem willkürlichen Symbol, z. B. a, und schreiben den einen Faktor, der a enthält, also z. B. $a_{b'}$ an erster Stelle. Anschließend an diesen schreiben wir den Faktor aus Π, welcher das zweite b' enthält, z. B. b'_c; an diesen schließen wir $c_{d'}$ usw. Schließlich muß wieder ein Faktor p'_a kommen, so daß $\Pi = \pm a_{b'} b'_c c_{d'} \ldots m'_n n_{p'} p'_a$ wird. Einen so geordneten Ausdruck nennen wir „Kette" und setzen

$$(79)\qquad \underline{a_{b'} b'_c c_{d'} d'_e \ldots p'_a = [a\, b\, c \ldots p\, a]} .$$

Kommen $2n$ Symbole in einer Kette $\mathfrak{K}$ vor, so ist $\mathfrak{K}$ ein Produkt aus n Faktoren vom Typus $a_{b'}$. Da nun in einem solchen Faktor immer ein gestrichenes und ein ungestrichenes Symbol verbunden ist, so muß die Anzahl n dieser Faktoren in $\mathfrak{K}$ gerade, also $= 2k$ sein. Es sind somit im ganzen $4k$ Symbole in einer Kette enthalten. Daraus folgt zunächst, daß wir nur Ketten mit einer geraden Anzahl von verschiedenen Buchstaben $a, b, c, \ldots$ zu untersuchen haben.

Wir geben gleich ein Beispiel für die Umformung eines Ausdruckes Π in eine Kette. Es war z. B. die Gleichung der zu p^2 bezüglich des K_a konjugierten Geraden G_{p^2} nach (52) $\pi_{a'} \pi_{b'} p_{a'} p_{b'} = 0$.

Wir können unter die Invarianten, die nur Komplexsymbole enthalten, auch veränderliche Strahl- und Achsenkoordinaten aufnehmen, da ja diese auch durch Komplexsymbole dargestellt werden. Solche Formen nennen wir zum Unterschiede von den Invarianten „Strahlformen“. So wird z. B. als Kette dargestellt

$$\pi_{a'} \pi_{b'} p_{a'} p_{b'} = -\pi_{a'} a'_p p_{b'} b'_\pi = -[\pi\, a\, p\, b\, \pi]\,.$$

Durch unsere symbolische Darstellung erhalten wir eine Identität zwischen Ausdrücken, die nur Komplexsymbole enthalten. Es ist nämlich

$$(80) \qquad \underline{[a\, b\, c\, d \ldots p\, a] \equiv [a'\, b'\, c' \ldots p'\, a']}\,,$$

d. h. wir können in jedem Ausdrucke Π die ungestrichelten Symbole stricheln und umgekehrt. Es entspricht dies der Dualität der Geraden im R_3 zu sich selbst.

Wir gehen nun zur Entwicklung einer beliebigen Kette

$$R = [a\, b\, c \ldots m\, n\, p\, a]$$

über. Wenn wir in $R = a_{b'} b'_c c_{d'} \ldots n_{p'} p'_a$ den ersten Faktor $a_{b'}$ zum Schlusse schreiben, so bleibt das Vorzeichen ungeändert und es wird

$$R = [b\, c\, d \ldots p\, a\, b] = b'_c c'_d \ldots m'_n n_{p'} p'_a p_{b'}\,.$$

Wir wenden jetzt auf die Faktoren $n_{p'} p'_a a_{b'} = -a'_a p'_n a_{b'}$ die Identität (26a) an. Dadurch wird in $R \cdot p$ mit a vertauscht und das Vorzeichen geändert; ferner sondert sich der Faktor $-\frac{1}{2} p'^2_a$ ab und zu dem neuen R kommt das Glied $-\frac{1}{2} a^2_{p'} [b\, c\, d \ldots m\, n\, b]$ dazu. Es wird also

$$\begin{aligned} R &= [a\, b \ldots p\, a] = [b\, c\, d \ldots m\, n\, p\, a\, b] \\ &= -[b\, c \ldots m\, n\, a\, p\, b] - \tfrac{1}{2} a^2_{p'} [b\, c \ldots n\, b]\,. \end{aligned}$$

Wir setzen für $[b\,c \ldots n\,b] = R_{ap}$, wo R_{ap} eine um zwei Faktoren kürzere Kette wie R ist, in der die Buchstaben in derselben Reihenfolge wie in R stehen, nur daß a und p ausgelassen wurde.

Wir kennen jetzt die Änderung, die in einer Kette durch Vertauschung zweier nebeneinanderstehenden Buchstaben hervorgerufen wurde. Wir schaffen nun in $R = [b\,c \ldots m\,n\,p\,a\,b]$ das Symbol a durch aufeinanderfolgende Vertauschungen von rechts nach links, bis es wieder an erster Stelle steht. So erhalten wir:

$$\begin{aligned}
R &= -[b\,c\,d\,e \ldots m\,n\,a\,p\,b] - \tfrac{1}{2}\,a_{p'}^2\,R_{ap} \\
&= +[b\,c\,d\,e \ldots m\,a\,n\,p\,b] + \tfrac{1}{2}\,a_{n'}^2\,R_{an} - \tfrac{1}{2}\,a_{p'}^2\,R_{ap}\,, \\
&\;\;\vdots \\
R &= +[b\,a\,c\,d \ldots m\,n\,p\,b] + \tfrac{1}{2}\,a_{c'}^2\,R_{ac} - \tfrac{1}{2}\,a_{d'}^2\,R_{ad} + \ldots \\
&\qquad\qquad - \tfrac{1}{2}\,a_{p'}^2\,R_{ap}\,, \\
R &= -[a\,b\,c\,d \ldots m\,n\,p\,b] - \tfrac{1}{2}\,a_{b'}^2\,R_{ab} + \ldots - \tfrac{1}{2}\,a_{p'}^2\,R_{ap}\,.
\end{aligned}$$

Hier sind jetzt im ersten Term rechts die ursprünglich gestrichelten Symbole ungestrichelt und umgekehrt, nach (80) ist also

$$\underline{4\,R = -a_{b'}^2\,R_{ab} + a_{c'}^2\,R_{ac} - \ldots + a_{n'}^2\,R_{an} - a_{p'}^2\,R_{ap}\,.} \tag{81}$$

Diese Gleichung zeigt, daß sich jede Kette in eine Summe von kürzeren Ketten zerlegen läßt. Die $a_{b'}^2$, $a_{c'}^2$, ... sind schon wirkliche Faktoren, also einfachste Invarianten A_{ik} oder Strahlformen.

Wir können nun mit Hilfe von (81) wieder jede Kette R_{ab} weiter zerlegen. Schließlich kommt man auf eine Kette der Form $(a\,b\,c\,d\,a)$, welche nach (81) direkt in Größen $a_{b'}^2$ zerfällt. Wir haben also die beiden wichtigen Sätze:

„Jede Invariante eines Systems von linearen Komplexen ist darstellbar durch die Invarianten A_{ii} jedes einzelnen Komplexes und durch die simultanen Invarianten A_{ik} von je zwei Komplexen."

„Jede Strahlform eines Systems von linearen K_i setzt sich zusammen aus den Formen K_i, A_{ii} und A_{ik}."

Wir können daran anschließend gleich eine weitere Folgerung ziehen. Es sei F eine allgemeine, nicht zerfallende Fläche von beliebigem Grade, welche zu einem System von K_1 (also auch von Geraden) kovariant ist. Es sei $F = 0$ die Gleichung dieser Fläche, die durch irgendwelche Lagebedingung definiert sein kann, in Punktkoordinaten x_i. Wenn wir statt x $y + \lambda z$ einsetzen und die Diskriminante dieser Gleichung $F(y + \lambda z) = 0$ bezüglich λ suchen, so erhalten wir die Bedingung, daß die Gerade $p^2 = (y z)$ F berührt, also die Gleichung Ψ von $\mathfrak{F}$ in Linienkoordinaten, und zwar da wir hier von $F = 0$ ausgegangen sind, in ungestrichenen Strahlenkoordinaten p_{ik}. Somit erhalten wir nach unserem letzten Satze Ψ als Aggregat der Formen K_i, A_{ii} und A_{ik}. So war z. B. (60) die Gleichung der durch $3 K_1$ bestimmten Regelfläehe, in diesen einfachsten Formen dargestellt.

Nun können wir in Ψ alle ungestrichenen Symbole stricheln und umgekehrt; dann kommen als Variable in dem neuen Ausdrucke $\Psi' = \Psi$ nicht mehr Strahl-, sondern Achsenkoordinaten p'_{ik} vor. Diese Gleichung $\Psi' = 0$ kann man sich aber genau so aus einer Gleichung $\Phi = 0$ entstanden denken, wie man sich $F = 0$ aus $\Psi = 0$ entstanden denken kann, d. h. $\Psi' = 0$ ist ebenso die Diskriminante einer Gleichung $\Phi(v' + \lambda w') = 0$ wie $\Psi = 0$ die einer Gleichung $F(y + \lambda z) = 0$ ist. Da nun durch $\Psi = 0$ und $\Psi' = 0$ dieselbe Fläche dargestellt wird, so muß auch $F = 0$ und $\Phi = 0$ dieselbe Fläche darstellen. Es ist somit $\Phi = 0$ die Gleichung von $F = 0$ in Ebenenkoordinaten u'. Dies gilt nur für nicht zerfallende Flächen.

Wir sind von $\mathfrak{F} = 0$ zu $\Phi = 0$ auf dem Umwege über $\Psi = \Psi' = 0$ gelangt. Praktisch erhalten wir $\Phi = 0$ als duale Gleichung von $F = 0$. Ein einfachstes Beispiel hierfür bietet die Gleichung der durch $3 K_1$ bestimmten Regelfläche; es war $F = a_{m'} a_{\alpha'} m'_x \alpha'_x$ und dual

$$\Phi = a'_m a'_\alpha m_{u'} \alpha_{u'} .$$

Wir können somit folgenden Satz aussprechen:

„Jede allgemeine Fläche, die zu einem System von linearen Komplexen kovariant ist, ist von derselben Ordnung und Klasse. Alle ihre Eigenschaften sind dualistisch übertragbar.“

Den letzten Teil dieses Satzes illustrieren wir noch durch ein Beispiel, das weiter unten ausführlich behandelt wird. Es seien $6\,K_1$ gegeben. Jeder Ebene v' entsprechen dann sechs konjugierte, in ihr gelegene Punkte. Diese liegen, wie später gezeigt wird, dann auf einem Kegelschnitt, wenn die Ebene v' eine Fläche 8. Klasse $\Phi_8 = 0$ umhüllt. Jedem Punkte y entsprechen bezüglich der $6\,K_1$ sechs durch ihn gehende Ebenen. Diese berühren denselben Kegel, wenn y auf einer Fläche 8. Ordnung $F_8 = 0$ liegt. Nach obigem Satze sind $\Phi_8 = 0$ und $F_8 = 0$ identisch. Die Gleichung von F_8 und einige Eigenschaften sollen später angegeben werden.

9. Die Kovarianten und Kontravarianten.

Eine Form, die nur Punktkoordinaten enthält und invarianten Charakter besitzt, heißt Kovariante; enthält sie nur Ebenenkoordinaten, so heißt sie Kontravariante. Formen mit x und u' heißen Zwischenformen; solche, die außerdem Linienkoordinaten enthalten, wollen wir gemischt nennen.

Wir können im folgenden alle drei Arten auf einmal behandeln. Der Geläufigkeit wegen sprechen wir von den Kovarianten.

Durch ganz analoge Überlegungen kommt man wie oben zu dem Resultat, daß sich jede Kovariante durch Ketten darstellen läßt. Wir sprechen daher nur von letzteren. Bei der Formierung der Ketten beginnen wir hier mit einer Variablen, z. B. x. So wird z. B. die Gleichung der durch $3\,K_1$ bestimmten F_2 als Kette

$$-[x\,m\,a\,\alpha\,x] = -x_{m'}\,m'_a\,a_{\alpha'}\,\alpha'_x = 0\,.$$

Wir ersehen aus dieser Darstellung sofort, daß eine Kovariante und Kontravariante, die durch $[x\,a\,b\,\ldots\,m\,x]$ bzw. $[u'\,a\,b\,c\,\ldots\,u']$ dargestellt wird, stets eine ungerade Anzahl von Buchstaben $a, b, c, \ldots$ enthalten muß. Bei einer Zwischenform $[x\,a\,b\,\ldots\,u']$ ist diese Zahl notwendig gerade.

Ebenso wie bei den Invarianten können wir hier in einer Kette $[x\,a\,b\,c\,d\,\ldots\,m\,x]$ zwei nebeneinanderstehende Buchstaben durch Anwendung von (26) vertauschen. Dadurch wird, wenn man z. B. b mit c vertauscht:

$$R = [x\,a\,b\,c\,d\ldots m\,x] = -[x\,a\,c\,b\,d\ldots m\,x] - \tfrac{1}{2}b_{c'}^2[x\,d\ldots m\,x]\,.$$

Ist b mit c gleichbedeutend, so ist dann

$$R = -\tfrac{1}{2} b_{c'}^2 R', \tag{82}$$

wo $R' = [x d e \ldots m x]$, also eine um zwei Faktoren kürzere Kette darstellt. Kommen nun in einer Kette zwei oder mehrere vertauschbare Symbole vor, so können wir durch Anwendung von (26) die Kette so umformen, daß je zwei vertauschbare Symbole nebeneinander stehen. Durch (82) fällt dann ein Faktor A_{ik} heraus. Wir haben dann R zurückgeführt auf Ketten, welche nur mehr die Koeffizienten jedes einzelnen Komplexes linear enthalten. Solche Ketten nennen wir „Normalketten". Waren in R $n K_1$ vorhanden, so enthält nach der Umformung die längste Normalkette die Koeffizienten der n Komplexe linear. Die anderen Ketten enthalten nicht mehr alle Komplexe.

Wir haben also den Satz:

„Jede Kovariante, Kontravariante und Zwischenform eines Systems von linearen Komplexen ist ein Aggregat von Normalketten, deren längste die Koeffizienten aller Komplexe enthält."

Nach diesem Satze läßt sich das vollständige Formensystem von Komplexen sofort hinschreiben. Wir geben ein Beispiel für die Kovarianten eines Systems von fünf Komplexen K_i. Es sind elf Formen, und zwar: zehn Formen F_{ikl}, die je drei der Komplexe enthalten $[x i k l x]$ und eine Form $F_0 \equiv [x 1 2 3 4 5 x]$. Durch diese elf Formen sind alle Kovarianten mit nur einer Reihe von Variablen x darstellbar. $F_{ikl} = 0$ ist die durch drei der K_i bestimmte Regelfläche. Die geometrische Bedeutung von F_0 ist folgende: Wir konstruieren zu x die bezüglich K_1 konjugierte Ebene, zu dieser den bezüglich K_2 konjugierten Punkt usw., schließlich erhalten wir eine bezüglich K_5 konjugierte Ebene. Soll diese durch x gehen, so muß x auf F_0 liegen. Wenn wir in $F_0 = [x 1 2 3 4 5 x]$ die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5$ permutieren, erhalten wir keine neue Form, wohl aber eine neue Fläche. Es ist nämlich z. B.

$$F_0 = [x 1 2 3 4 5 x] = -[x 1 2 3 5 4 x] - \tfrac{1}{2} 4_{5'}^2 F_{123} \, .$$

So gibt es $5!$ Flächen F_0, aber nur eine Form F_0. Liegen aber die K_i gegenseitig involutorisch, so gibt es auch nur eine einzige Fläche F_0. Durch die elf Kontravarianten werden dieselben Flächen in Ebenenkoordinaten dargestellt.

Es seien sechs Komplexe K_i gegeben. Die Ebene der drei Punkte x, y, z sei v'. Ist $\pi^2_{a'} = 0$ einer der $6 K_i$, so wird der zu v' konjugierte Punkt $P_v \equiv a_{u'} a_{v'}$ oder $a_{u'}(a\,x\,y\,z) = 0$; dies gibt nach (25) auch

(83) $$\underline{P_{v'} \equiv u'_x a'_y a'_z + u'_y a'_z a'_x + u'_z a'_x a'_y = 0\,.}$$

Setzen wir in v' eine ternäre Koordinatenbestimmung fest, so sind, wenn wir das Dreieck x, y, z mit den Seiten p^2, q^2, r^2 als Fundamentaldreieck einführen,

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3 = a'_y a'_z : a'_z a'_x : a'_x a'_y$$

die ternären Punktkoordinaten von $P_{v'}$. Dies ist aber dasselbe wie $p^2_{a'} : q^2_{a'} : r^2_{a'}$, somit wird auch

(84) $$\underline{P_{v'} \equiv u'_x p^2_{a'} + u'_y q^2_{a'} + u'_z r^2_{a'} = 0\,.}$$

Sind nun $\pi^2_{b'} = 0$ und $\pi^2_{c'} = 0$ zwei weitere Komplexe, so erhalten wir in v' zwei weitere Punkte mit den Koordinaten λ_i und μ_i. $P_\varkappa$, P_λ und P_μ liegen auf einer Geraden, wenn $(\varkappa\,\lambda\,\mu) = 0$ ist. Nun wird:

$$(\varkappa\,\lambda\,\mu) = \begin{vmatrix} a'_y a'_z & a'_z a'_x & a'_x a'_y \\ b'_y b'_z & b'_z b'_x & b'_x b'_y \\ c'_y c'_z & c'_z c'_x & c'_x c'_y \end{vmatrix} = \tfrac{1}{8} \begin{vmatrix} p^2_{a'} & q^2_{a'} & r^2_{a'} \\ p^2_{b'} & q^2_{b'} & r^2_{b'} \\ p^2_{c'} & q^2_{c'} & r^2_{c'} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{8}\,|\,p^2_{a'} q^2_{b'} r^2_{c'}\,|\,.$$

Setzen wir $A = (a\,x\,y\,z)\,a_{c'}\,(b\,x\,y\,z)\,b_{c'} \equiv a_{v'} b_{v'} a_{c'} b_{c'}$, so wird:

$$\begin{aligned} 2A &= (p^2_{a'} c'_x + q^2_{a'} c'_y + r^2_{a'} c'_z)\,(p^2_{b'} c'_x + q^2_{b'} c'_y + r^2_{b'} c'_z) \\ &= \tfrac{1}{8}\,|\,p^2_{a'} q^2_{b'} r^2_{c'}\,|\,, \end{aligned}$$

also kommt:

(85) $$\underline{|\,p^2_{a'} q^2_{b'} r^2_{c'}\,| = 16\, a_{v'} b_{v'} a_{c'} b_{c'}\,.}$$

Es führt dies wie es sein muß auf die Regelfläche der Komplexe K_a, K_b und K_c.

Es seien in v' die sechs Punkte $\varkappa$, λ, μ, ν, ϑ und ω gegeben. ω sei bestimmt durch die zwei in v' liegenden Geraden σ' und τ', wo σ'_i und τ'_i ternäre Linienkoordinaten sind. Wir setzen für einen Augenblick x und u' als ternäre, variable Koordinaten in v' voraus. Dann werden die von ω nach den Punkten $\varkappa$, λ, μ und ν gehenden Strahlen

$$\sigma'_x - \frac{\sigma'_\varkappa}{\varrho'_\varkappa} \cdot \varrho'_x = 0\,,$$

$$\sigma'_x - \frac{\sigma'_\lambda}{\varrho'_\lambda} \cdot \varrho'_x = 0\,,$$

$$\sigma'_x - \frac{\sigma'_\mu}{\varrho'_\mu} \cdot \varrho'_x = 0\,,$$

$$\sigma'_x - \frac{\sigma'_\nu}{\varrho'_\nu} \cdot \varrho'_x = 0\,.$$

Ihr Doppelverhältnis wird also

$$\varepsilon = \frac{\dfrac{\sigma'_\varkappa}{\varrho'_\varkappa} - \dfrac{\sigma'_\mu}{\varrho'_\mu}}{\dfrac{\sigma'_\lambda}{\varrho'_\lambda} - \dfrac{\sigma'_\mu}{\varrho'_\mu}} \cdot \frac{\dfrac{\sigma'_\lambda}{\varrho'_\lambda} - \dfrac{\sigma'_\nu}{\varrho'_\nu}}{\dfrac{\sigma'_\varkappa}{\varrho'_\varkappa} - \dfrac{\sigma'_\nu}{\varrho'_\nu}} = \frac{(\varkappa\,\mu\,\omega)\,(\lambda\,\nu\,\omega)}{(\lambda\,\mu\,\omega)\,(\varkappa\,\nu\,\omega)}\,.$$

Soll ϑ auf dem durch $\varkappa$, λ, μ, ν und ω bestimmten Kegelschnitt liegen, so muß das Doppelverhältnis ε' der vier Strahlen von ϑ nach $\varkappa$, λ, μ, ν gleich ε sein. Die Bedingung wird also

$$\frac{(\varkappa\,\mu\,\omega)\,(\lambda\,\nu\,\omega)}{(\lambda\,\mu\,\omega)\,(\varkappa\,\nu\,\omega)} = \frac{(\varkappa\,\mu\,\vartheta)\,(\lambda\,\nu\,\vartheta)}{(\lambda\,\mu\,\vartheta)\,(\varkappa\,\nu\,\vartheta)}\,,$$

oder wenn wir kurz die sechs Punkte mit 1 bis 6 bezeichnen:

$$(1\,2\,3)\,(3\,4\,5)\,(5\,6\,1)\,(2\,4\,6) - (4\,5\,6)\,(6\,1\,2)\,(2\,3\,4)\,(5\,1\,3) = 0\,.$$

Nun können wir nach (85) $(\varkappa\,\lambda\,\mu)$ als Kette

$$\Phi_{123} = [v'\,1\,2\,3\,v']$$

darstellen, wobei sich die Zahlen 1, 2, 3 schon auf die Komplexe K_i beziehen. Wir haben also die Bedingung, daß die sechs, der Ebene v' bezüglich der K_i konjugierten Punkte auf einem Kegelschnitt liegen jetzt in der Form:

$$\underline{\Phi_8 \equiv \Phi_{123}\,\Phi_{345}\,\Phi_{561}\,\Phi_{246} - \Phi_{456}\,\Phi_{612}\,\Phi_{234}\,\Phi_{513} = 0\,.} \tag{86}$$

Für variable v' ist dies die Fläche achter Ordnung und Klasse, von der oben die Rede war. $\Phi_{ikl} = 0$ ist hierbei eine $\mathfrak{F}_2$. Die Gleichung F_8 von Φ_8 ist derselbe Ausdruck (86), nur ist statt Φ_{ikl} überall F_{ikl} zu setzen.

Sind die K_i alle speziell, so ist F_8 der Ort von Kegelspitzen, welche alle sechs Geraden berühren und gleichzeitig der Ort von Ebenen, für welche die sechs Schnittpunkte mit den sechs Geraden auf einem Kegelschnitte liegen. Diese sechs Geraden gehören jedenfalls der Fläche an.

Aus (86) kann man weiteres noch ablesen: Der Fläche gehören die 30 Direktionen der 15 Kongruenzen $C_{i,k}$ an; ebenso die 30 Transversalen, welche je zwei von $4\,K_i$ enthalten. Die Schnittkurven von je zwei Flächen F_{ikl} liegen ganz auf F_8.

Bilden die $6\,K_i$ ein Kleinsches System, d. h. ist $A_{ik} = 0$, $A_{ii} \gtrless 0$, so sind, wie leicht nachzuweisen, je zwei Flächen F_{ikl} und $F_{i'k'l'}$, wo $(i\,k\,l)$ und $(i'\,k'\,l')$ komplementäre Indizesgruppen sind, identisch; somit wird F_8 und $\Phi_8 \equiv 0$, d. h. in jeder Ebene liegen die $6\,P_i$ auf einem Kegelschnitt.

10. Die Konfigurationen eines Komplexsystems.

Es seien eine gerade Anzahl $= 2n$ von linearen Komplexen K_i gegeben. Wir nehmen $2n \leqq 6$ an, denn mehr als $6\,K_i$ sind nicht mehr unabhängig voneinander.

Einem Punkt y wird, wenn zwei Komplexe K_i, K_k beliebig gewählt werden, durch die Zwischenform $[y\,i\,k\,u'] = 0$ ein Punkt zugeordnet, welchen wir einen zweiwertigen, zugeordneten Punkt nennen. Nehmen wir $2k$ beliebige von den $2n\,K_i$, so ist durch die Zwischenform

$$[y\,1\,2\,3\,\ldots\,2k\,u'] = 0$$

ein $2k$-wertiger Punkt P_{2k} dargestellt.

Da in P_{2k} die Reihenfolge der $2k$ Komplexe nicht gleichgültig ist, so gibt es überhaupt $\binom{2n}{2k}(2k)!$ Punkte P_{2k}. Daher werden im ganzen dem Punkte y durch die einfachsten Zwischenformen

$$\alpha_{2n} = 1 + \binom{2n}{2}2! + \binom{2n}{4}4! + \ldots + \binom{2n}{2n}(2n)! \text{ Punkte}$$

zugeordnet. Hierbei ist y schon mitgezählt. Vorausgesetzt wird ferner, daß $A_{ik} \gtrless 0$, da sich sonst α_{2n} verringert. Denn liegen z. B. K_i und K_k involutorisch, so ist

$$[x 1 2 \ldots i k \ldots u'] = -[x 1 2 \ldots k i \ldots u'],$$

gibt also denselben Punkt.

Wir erhalten so zu jedem Punkte y eine Gruppe von α_{2n} Punkten, die wir die zu y gehörige „Komplexkonfiguration C_{2n}" nennen wollen. Ihr steht dual eine Konfiguration C'_{2n} von Ebenen gegenüber.

Es sei $P \equiv [y 1 2 3 \ldots k u'] = 0$ ein Punkt der C_{2n}. Die analoge Ebene von C'_{2n} ist $E \equiv [v' 1 2 3 \ldots k x] = 0$. Wir fragen uns, wann P in E liegt. Dann muß offenbar $[v' 1 2 \ldots k k \ldots 3 2 1 y] = 0$ sein. Hier sondern sich nun $k^2_{k'}$, $(k-1)^2_{(k-1)'}$, $\ldots$, $3^2_{3'}$, $2^2_{2'}$ und $1^2_{1'}$ nach (82) ab und wir erhalten $v'_y = 0$, d. h. y liegt in v'. Somit:

„Liegen in C_{2n} und C'_{2n} y und v' incident, so sind beide Konfigurationen incident."

„Eine Komplexkonfiguration wird analytisch dargestellt durch das einfachste System aller Zwischenformen."

Setzen wir der Reihe nach $2n = 2$, 4 und 6, so erhalten wir die C_2, C_4 und C_6. C_2 besteht aus drei Punkten: zwei zweiwertige und y. C_4 besteht aus 37 Punkten: y, 12 zwei- und 24 vierwertige. C_6 besteht aus 1111 Punkten: y, 30 zwei-, 360 vier- und 720 sechswertige Punkte.

Nach der Definition ist jede C_{2n-2k} in C_{2n} ganz enthalten.

Über die Lage der Punkte einer C_{2n} zueinander können wir aus der Umformungsgleichung für Zwischenformen leicht einige Sätze ableiten.

Es sei

$$Y_{1,2,3,\ldots,2n-1,2n} \equiv [y 1 2 3 \ldots 2n u'] = 0$$

ein $2n$-wertiger Punkt. Dann ist

$$(87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{Y_{1,2,3,\ldots,i,k,\ldots,2n} \equiv -Y_{1,2,3,\ldots,k,i,\ldots,2n}} \\ \underline{\qquad -\tfrac{1}{2} A_{ik} Y_{1,2,3,\ldots,i-1,k+1,\ldots,2n}\,.} \end{array} \right.$$

Diese drei Punkte Y, von denen zwei $2n$-wertig und einer $(2n-2)$-wertig sind, liegen also auf einer Geraden. Wir nennen eine solche Gerade $2n$-wertig.

Da in (87) nur zwei nebeneinanderstehende K_i vertauscht werden, so gehen von jedem P_{2n} $(2n-1)$ $2n$-wertige Geraden g_{2n} aus, es gibt daher im ganzen $\frac{1}{2}(2n)!\,(2n-1)$ solche g_{2n}. Auf jeder dieser liegt ein P_{2n-2}, und da es $\binom{2n}{2}(2n-2)!$ solche P_{2n-2} gibt, so gehen je $(2n-1)$ g_{2n} durch einen P_{2n-2}. Allgemein:

Durch die $\frac{(2n)!}{(2n-2k)!}$ P_{2k} sind $\frac{1}{2}\frac{(2n)!}{(2n-2k)!}(2k-1)\,g_{2k}$ bestimmt; diese gehen durch alle P_{2k-2}, und zwar durch jeden P_{2k-2} $\varepsilon_{2k} = \frac{1}{2}(2k-1)(2n-2k+2)(2n-2k+1)$. Für $2k=2$ wird $\varepsilon_2 = n(2n-1)$. Diese $n(2n-1)$ Geraden gehen alle durch y.

Ein besonderes Interesse bietet die C_{2n}, wenn alle $A_{ik}=0$ sind. Dann gibt es nur $\binom{2n}{2k}$ $2k$-wertige Punkte P_{2k}; insbesondere nur einen P_{2n}. Die Konfiguration ist dann in sich geschlossen, d. h. wenn man statt von y von einem P_{2k}, der zu y gehört, ausgeht, so transformiert sich die C_{2n} in sich. Denn setzt man in $[y\,1\,2\,3\ldots i\,u']=0$ statt y die Koordinaten eines beliebigen anderen Punktes der C_{2n}, z. B. $[y\,i\,k\,l\ldots u']=0$ ein, so erhält man $[y\,i\,k\,l\ldots 1\,2\,3\ldots i\,u']=0$, was wieder auf eine Normalkette führt. Man kommt also auf einen anderen Punkt in C_{2n}. Insbesondere geht $Y_{123\ldots i}$ in y selbst über, wenn y in $Y_{123\ldots i}$ transformiert wurde, d. h. bewegt sich y auf der Geraden $y\,Y_{123\ldots i}$, so beschreibt $Y_{123\ldots i}$ dieselbe Gerade. Jeder Punkt der C_{2n} beschreibt dann auch eine Gerade zu einem anderen Punkte der Konfiguration. Auf jeder solchen Geraden wird also eine Involution erzeugt. Die Doppelpunkte dieser auf $y\,Y_{12\ldots i}$ erzeugten Involutionen ergeben sich aus

$$Y_{123\ldots i} + (-1)^i \lambda y\cdot(\tfrac{1}{4}A_{11})(\tfrac{1}{4}A_{22})\ldots(\tfrac{1}{4}A_{ii}) = 0$$

und

$$y + \lambda Y_{123\ldots i} = 0\,;$$

woraus für λ folgt

$$\lambda = \pm\frac{2^i}{A_{11}\ldots A_{ii}}\sqrt{(-1)^i A_{11}\ldots A_{ii}}\,.$$

Für einen solchen Doppelpunkt fallen zwei Punkte der C_{2n} zusammen.

Wenn nicht alle $A_{ik} = 0$ sind, so lassen sich ebenfalls auf jeder Geraden $y\,Y_{123\ldots i}$ zwei solche Punkte finden. Die C_{2n} ist aber nicht in sich geschlossen, obwohl einzelne Punkte ineinander übergehen können.

Sind alle $A_{ik} = 0$, so erhalten wir in der C_{2n}

$$2^{2n-1} = 1 + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} + \ldots \text{ Punkte.}$$

Insbesondere wird für $2n = 2, 4, 6$ diese Anzahl bzw. $2, 8$ und 32. Bei sechs Komplexen, die dann ein Kleinsches System bilden, sind sich also die Punkte des Raumes zu je 32 zugeordnet. Es ist dies ein Spezialfall der $C_{2n} = C_6$ aus 1111 Punkten.

II. Abschnitt.

Systeme von linearen Komplexen.

1. Der Komplex als Raumelement.

Wir bezeichnen der Kürze wegen einen linearen Komplex mit K^1, einen speziellen mit K^{10}.

Ein K^1 ist durch sechs homogene Zahlen π_{ik} bestimmt, so daß es $\infty^5 K^1$ im R_3 gibt. Wir nennen diese sechs Zahlen π_{ik} die Koordinaten des K^1. Diese Definition ist im Anschluß an unsere bisherigen Überlegungen gebildet, d. h. wenn $\pi_{\alpha'}^2 = 0$ die Gleichung eines K^1 ist, wobei für π_{ik} die Koordinaten einer Geraden zu denken sind, so nennen wir die Größen a_{ik} (oder a'_{ik}, was hier völlig belanglos ist) die Koordinaten des Komplexes K_a oder $K^1(a)$.

Eine Gleichung zwischen den Koordinaten π_{ik} eines K^1 legt allen möglichen $\infty^5 K^1$ eine Bedingung auf, definiert also ein System von $\infty^4 K^1$; wir wollen sagen, die vorgelegte Gleichung ist „Gleichung dieses Komplexsystems". Ist sie insbesonders linear, so erhalten wir ein lineares System von $\infty^4 K^1$, welches System wir eine „Komplexebene" nennen wollen und kurz Ke dafür schreiben. Ist $a_{\pi'}^2 = 0$ die Gleichung dieser Ke, so nennen wir die a_{ik} die Koordinaten der Ke und bezeichnen sie als Komplexebenenkoordinaten. In $\pi_{\alpha'}^2 = 0$ sind die π_{ik} jetzt Koordinaten eines K^1, es besteht also im allgemeinen nicht die Gleichung $\pi_{\pi'}^2 = 0$.

Unserer Definition gemäß ist $\tau_{\pi'}^2 = 0$ die Bedingung, daß ein $K^1(\pi)$ mit einer $Ke(\tau)$ vereinigt liegt. Hierfür können wir auch sagen, der $K^1(\pi)$ liegt in der $Ke(\tau)$ oder die $Ke(\tau)$ geht durch den $K^1(\pi)$.

Man bemerkt hier die Analogie zwischen Komplexgeometrie und der des R_5, da es sich ja in jedem Falle um sechs homogene Veränderliche handelt. Wir könnten also auch in der Komplexgeometrie, so wie es ja vielfach schon geschehen ist, sechs Variable p_i einführen. Trotzdem bleiben wir bei unseren Größen π_{ik} mit zwei Indizes. Da nämlich $\binom{4}{2} = 6$ ist, so kommen wir mit vier Indizes 1, 2, 3 und 4 aus, die wir in Paare zusammenfassen. Der Vorteil unserer Schreibweise mit Komplexsymbolen zeigt sich denn hauptsächlich darin, daß wir in der Komplexgeometrie, trotzdem sechs Variable auftreten, mit quaternären Formen vollkommen auslangen und nicht mit sexternären Formen zu rechnen brauchen.

Wir erwähnen kurz die übrigen linearen Systeme von K^1. $2K^1$ bestimmen als Verbindungsgebilde ein Komplexbüschel (KB), $3K^1$ ein Komplexnetz (KN), 4 Komplexe ein Komplexgebüsch (KG), endlich $5K^1$ die schon erwähnte Ke. Die Gesamtheit der $\infty^5 K^1$ nennen wir den Komplexraum. Der K^1 und die Ke, dann ein (KB) und das (KG), endlich das (KN) zu sich selbst stehen sich im Komplexraum dual gegenüber.

Demgemäß erhalten wir als Gleichung eines K^1 mit den Koordinaten p_{ik}: $\tau_{p'}^2 = 0$. Hierbei sind die Variablen τ_{ik} Koordinaten von Ke, welche alle durch $K^1(p)$ gehen. Wir haben also jetzt zweierlei Gleichungen für einen $K^1(p)$. Erstens unsere frühere, wo K^1 dargestellt wurde als lineares System von ∞^3 Geraden; zweitens die eben angeführte, wo der K^1 dargestellt wird als Schnitt von $\infty^4 Ke$.

Wir bezeichnen im folgenden die Koordinaten eines K^1 mit $\pi, p, q, \ldots$; die einer Ke mit $\tau, \sigma, \varrho, \ldots$ Das Gebilde, welches durch Nullsetzen einer homogenen Gleichung $n$ten Grades in den π_{ik} dargestellt wird, nennen wir ein „Komplexsystem $n$ter Ordnung". Enthält die Gleichung nicht die π_{ik}, sondern die τ_{ik} als Variable, so sprechen wir von einem „Komplexsystem $n$ter Klasse".

Wir werden später die Komplexsysteme 2. Ordnung und 2. Klasse eingehender behandeln. Es wird sich dann zeigen, daß beide identisch sind, so wie etwa Flächen 2. Ordnung und Klasse im Raume.

Ein Komplexsystem 2. Ordnung bezeichnen wir kurz mit S_2, eins 2. Klasse mit Σ_2. Ein sehr spezielles S_2 wird offenbar durch die Gleichung

$$(1) \qquad \underline{S_{20} \equiv \pi_{\pi'}^2 = 0}$$

dargestellt. Wir nennen es das „identische System“ und bezeichnen es mit S_{20}. Ist $\pi^2_{\pi'} = 0$, so wird der $K^1(\pi)$ speziell und kann durch seine Achse ersetzt werden. Also:

„Betrachtet man alle Geraden als spezielle Komplexe, so ist der dreidimensionale Raum als Gesamtheit seiner Geraden ein besonderes Komplexsystem 2. Ordnung.“

Es gibt im R_3 ∞^4 Gerade; durch ein Komplexsystem werden ebensoviele K_1 definiert. Wir können somit die Bedingung, daß ein K^1 speziell sei, auch durch die Forderung ersetzen, daß er dem identischen Systeme $S_{20} = 0$ angehöre.

Es sei nun eine $Ke(a)$ durch $\pi^2_{\alpha'} = 0$ gegeben. Diese Ke schneidet S_{20}, d. h. Ke und S_{20} haben eine Mannigfaltigkeit von $\infty^3 K^1$ gemeinsam, welche K^1 zufolge $S_{20}=0$ lauter K^{10} sind. Wir können also sagen:

„Die Achsen der K^{10} einer Ke bilden einen K^1, welcher dieselben Koordinaten hat, wie die Ke.“

Ein K^1 ist also als Geradengebilde eigentlich keine lineare Mannigfaltigkeit. Wir sprachen immer von „linearen“ Komplexen, da die Gleichungen zwischen den Koordinaten der Geraden linear sind.

Durch den Schnitt eines Komplexsystems n ter Ordnung mit dem identischen System $S_{20} = 0$ ist eine Geradenmannigfaltigkeit definiert, die man gewöhnlich einen Geraden- oder Strahlenkomplex n ter Ordnung oder n ten Grades nennt. Insbesonders entsteht ein „quadratischer Komplex“ durch den Schnitt eines S_2 mit dem S_{20}.

Zu jedem S_2 existiert bezüglich eines $K^1(p)$ eine Polarkomplexebene, deren Gleichung man durch $\sum \frac{\partial S_2}{\partial \pi_{ik}} p_{ik} = 0$ erhält, und deren geometrische Bedeutung später erörtert werden wird. Ein K^1, der seiner eigenen Polar-Ke angehört, liegt selbst auf $S_2 = 0$. Im allgemeinen gehört bezüglich eines $S_2 = 0$ auch zu jeder Ke ein K^1 als Pol. Die Bedingung, daß dieser Polkomplex auf der ursprünglichen Ke liegt, gibt die Gleichung von S_2 in Komplexebenenkoordinaten τ_{ik}. S_2 erscheint dann als Komplexsystem 2. Klasse $\Sigma_2 = 0$.

Wir nehmen nun statt eines allgemeinen S_2 das S_{20} für diese Betrachtungen. Wie weiter unten gezeigt wird, ergibt sich als Gleichung von S_{20} in Komplexebenenkoordinaten

$$(2) \qquad \underline{\Sigma_{20} \equiv \tau_{\tau'}^2 = 0\,.}$$

Wenn eine Ke das Σ_{20} berührt, so nennen wir sie „speziell", geradeso wie ein K^1 speziell heißt, wenn er dem S_{20} angehört.

Ist $\tau_{p'}^2 = 0$ ein $K^1(p)$, so wird seine Polar-Ke bezüglich $S_{20} = 0$: $\pi_{p'}^2 = 0$. Also:

„Ein K^1 und eine Ke mit gleichen Koordinaten sind konjugiert bezüglich $S_{20} = 0$. Es enthält also diese Polar-Ke von $K^1(p)$ alle Gerade von $K^1(p)$ als spezielle Komplexe."

Für einen $K^1(q)$, welcher der Polar-Ke von $K^1(p)$ angehört, besteht die Gleichung $p_{q'}^2 = 0$. Somit:

„$2\,K^1$ sind bezüglich $S_{20} = 0$ konjugiert, wenn sie involutorisch liegen."

Ebenso nennen wir $2\,Ke$ involutorisch, wenn sie bezüglich $\Sigma_{20} = 0$ konjugiert sind.

Gehört $K^1(p)$ dem $S_{20} = 0$ an, so enthält seine Polar-Ke diesen $K^1(p)$ selbst. Wir sprechen dann von einer Tangential-Ke. Ihre Gleichung ist $\pi_{p'}^2 = 0$ (für $p_{p'}^2 = 0$). Diese Tangential-Ke ist ebenso speziell wie $K^1(p)$. Sie schneidet S_{20} nach dem Geradenkomplex $K^1(p)$, wobei man jede seiner Geraden als Achse eines K_{10} aufzufassen hat.

Liegt nicht einer, sondern mehrere unabhängige K^1 vor, welche eine Mannigfaltigkeit oder ein Komplexgebiet M_1 bestimmen, so hat jeder dieser K^1 eine Polar-Ke bezüglich $S_{20} = 0$. Diese Polar-Ke durchschneiden sich in einem neuen Gebiete M_2, welches so zu M_1 polar zugeordnet ist. M_1 und M_2 heißen auch „ergänzende Gebiete". Nach dem obigen Satze, daß die Polar-Ke eines $K^1(p)$ dessen Strahlen als K_{10} enthält, ergibt sich hier unmittelbar:

„Die Geraden des Gebietes M_1 bilden die Achsen der K_{10} von M_2 und umgekehrt."

Ferner folgt aus obigem noch:

„Jeder K^1 von M_1 liegt zu jedem K^1 von M_2 involutorisch."

2. Das Komplexbüschel.

Zwei $K^1(p)$ und $K^1(q)$ bestimmen ein Komplexbüschel oder, wie wir in folgendem kurz sagen wollen, ein Büschel $KB(p, q)$. Ein beliebiger $K^1_\varkappa$ dieses Büschels wird durch

$$K^1_\varkappa \equiv \varkappa_1 \tau^2_{p'} + \varkappa_2 \tau^2_{q'} = 0$$

dargestellt.

Wir nennen die zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{23} & p_{34} & p_{42} \\ q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{23} & q_{34} & q_{42} \end{vmatrix} = |p\,q|$$

die „Komplexkoordinaten" des Büschels $KB(p, q)$. Es gibt ihrer 15, von denen aber nur 9 voneinander unabhängig gewählt werden können. Die Relationen, die zwischen diesen 15 Größen bestehen, behandeln wir später allgemein bei den Komplexen im R_5. Wir bezeichnen diese 15 Größen durch ein symbolisches Produkt:

$$(3) \qquad \underline{\varphi_{ik,rs} \equiv \begin{vmatrix} p_{ik} & p_{rs} \\ q_{ik} & q_{ik} \end{vmatrix}} = a_{ik} \cdot \alpha_{rs} = a_i \cdot a_k \cdot \alpha_r \cdot \alpha_s\,,$$

$$(4) \qquad \underline{\varphi_{ik,rs} = \varphi'_{mn,\sigma\tau}},$$

wenn mn und $\sigma\tau$ komplementär zu ik und rs ist.

Hier sind die a_i und α_i Komplexsymbole. Je zwei a_i geben aber zusammen nicht bereits eine wirkliche Zahl a_{ik}, sondern wieder ein Symbol a_{ik}, welches erst mit α_{rs} vereinigt eine wirkliche Größe $\varphi_{ik,rs}$ gibt. Wir stellen also die Koordinaten eines Komplexbüschels durch Komplexsymbole dar. Daß wir nicht $a_{ik} \cdot a_{rs}$, sondern $a_{ik} \cdot \alpha_{rs}$ schreiben, also einen zweiten Buchstaben einführen, hat seinen Grund in der zu verlangenden Eindeutigkeit, wenn wir die Symbole zu Zahlen vereinigen. Die Symbole a und α sind hier gleichbedeutend, also vertauschbar. Nur ändert sich bei ihrer Vertauschung das Vorzeichen der Form, da dies einer Vertauschung von p und q gleichkommt. Es kommt dies in der Gleichung $a_{ik}\,\alpha_{rs} = -\alpha_{ik}\,a_{rs}$ zum Ausdruck. Eine bloße Umstellung der beiden Faktoren in $a_{ik}\,\alpha_{rs}$ ändert nichts, denn es ist

$$a_{ik}\,\alpha_{rs} \equiv \alpha_{rs}\,a_{ik}\,.$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich, wie es sein muß:

$$
(5) \qquad \begin{cases} \varphi_{ik,rs} = -\varphi_{ki,rs} = -\varphi_{rs,ik}\,, \\ \varphi_{ii,rs} = 0\,, \\ \varphi_{ik,ik} = 0\,. \end{cases}
$$

Wir erwähnen anschließend hieran gleich, wie wir später ein Komplexsystem 2. Ordnung $S_2 = 0$ durch eine Gleichung darstellen:

$$
(6) \qquad \underline{S_2 \equiv \pi_{a'}^2 \pi_{\alpha'}^2 = 0\,.}
$$

Hier sind die a_i und α_i auch vertauschbare Komplexsymbole; aber es ist dann $a_{ik}\alpha_{rs} = \alpha_{ik}a_{rs}$, d. h. die a_{ik} und α_{rs} sind wie gewöhnliche Symbole zu behandeln. Ein a_{ik} und ein α_{rs} zusammen geben erst einen wirklichen Koeffizienten der sexternären, quadratischen Form $S_2 = 0$. Durch $\pi_{a'}^2 \pi_{\alpha'}^2 = 0$ ist dann die allgemeinste quadratische Gleichung zwischen den π_{ik} gegeben. Diese Darstellung wäre z. B. auch bei einer Fläche 2. Ordnung F_2 im R_3 durch $a_x' \alpha_x' = 0$ möglich; doch ist es da einfacher, $a_x'^2 = 0$ zu schreiben. Bei dem S_2 müßten wir nach dieser Art $(a_{\pi'}^2)^2 = 0$ schreiben und kämen infolge unserer Darstellung durch Komplexsymbole auf Vieldeutigkeiten bei der Bildung der Koeffizienten und Variablen aus den Produkten $a_i a_k a_r a_s$ und $\pi_i' \pi_k' \pi_r' \pi_s'$. —

Es seien σ_{ik} die Koordinaten einer Ke. In dieser $Ke(\sigma)$ liegt ein Komplex des Büschels $KB(p, q)$; dessen Gleichung sei $\varkappa_1 \pi_{p'}^2 + \varkappa_2 \pi_{q'}^2 = 0$. Eliminiert man aus dieser und aus $\varkappa_1 \sigma_{p'}^2 + \varkappa_2 \sigma_{q'}^2 = 0$ die $\varkappa_i$, so wird

$$
K_\varkappa = \begin{vmatrix} \pi_{p'}^2 & \pi_{q'}^2 \\ \sigma_{p'}^2 & \sigma_{q'}^2 \end{vmatrix} = 0\,.
$$

Zerlegt man diese Determinante und führt die Koordinaten $(a\alpha)$ des Büschels $KB(p, q) \equiv KB(a, \alpha)$ ein, so erhält man die Gleichung dieses Schnittkomplexes

$$
(7) \qquad \underline{\tau_{a'}^2 \sigma_{\alpha'}^2 = 0\,.}
$$

Ist hier $\tau_{\tau'}^2 = 0$, so erhält man einen Geradenkomplex; es ist derjenige des Büschels, welcher mit dem $K^1(\sigma)$ involutorisch liegt.

Wie muß nun $Ke(\sigma)$ liegen, damit der durch (7) dargestellte Schnittkomplex speziell ist? Dann muß offenbar $a_{b'}^2 \sigma_{\alpha'}^2 \sigma_{\beta'}^2 = 0$ sein für $(a\alpha) = (b\beta)$. Lassen wir σ veränderlich sein, so erhalten wir die Gleichung der Leitlinien des Büschels als besonderes Komplexsystem 2. Klasse dargestellt:

$$\underline{T \equiv \tau_{\alpha'}^2 \tau_{\beta'}^2 a_{b'}^2 = 0\,.} \tag{8}$$

Ist hier $\tau_{\tau'}^2 = 0$, so erhält man die Leitlinien als besonderen quadratischen Linienkomplex; ihm gehört das ganze Netz des Büschels an.

Führt man in (8) für die $a_{ik}\,\alpha_{rs}$ die Größen $(p\,,\,q)_{ik,rs}$ ein, so kommt man auf die schon durch Formel (57) (Abschnitt I) gegebene Gleichung:

$$K_1^2 A_{22} - 2\,A_{12} K_1 K_2 + A_{11} K_2^2 = 0\,,$$

woraus sich ergibt, daß T in zwei lineare Faktoren zerfällt, die gleich Null gesetzt, spezielle Komplexe darstellen.

Die Diskriminante D des Büschels ist:

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = p_{p'}^2 q_{q'}^2 - (p_{q'}^2)^2$$

oder

$$D = \begin{vmatrix} p_{p'}^2 & p_{q'}^2 \\ q_{p'}^2 & q_{q'}^2 \end{vmatrix} = 4\,\Sigma\Sigma (p\,q)_{ik,rs} (p'\,q')_{ik,rs}$$
$$= 4\,\Sigma\Sigma\, a_{ik}\,\alpha_{rs}\, b'_{ik}\,\beta'_{rs}\,,$$

also

$$\underline{D = a_{b'}^2 \alpha_{\beta'}^2\,.} \tag{9}$$

Ist $D = 0$, so ist das Büschel speziell; T ist dann ein vollständiges Quadrat und gibt die doppelte Leitlinie. Das Büschel „berührt" dann das $S_{20} = 0$.

Ist endlich das Büschel $KB(a\alpha)$ singulär, d. h. besteht es aus lauter speziellen Komplexen, so ist die durch das Büschel definierte Kongruenz eine „Büschelkongruenz" nach unserer früheren Bezeichnung. Das analytische Kennzeichen dafür ist

$$\underline{T \equiv 0\,.} \tag{10}$$

Sind die Büschelkoordinaten $\varphi_{ik,rs}$ gegeben, so kann man die Leitlinien folgend finden: Man schneidet das KB

durch zwei beliebige Ke, wodurch man $2K^1$ erhält und dann nach schon angegebenen Methoden verfährt. Oder wir setzen

$$T \equiv K_{(p)} \cdot K_{(q)} ,$$

also

$$\underline{\alpha'_{ik} \beta'_{ik} a^2_{b'} = p'_{ik} q'_{ik} ,} \tag{11}$$

$$\underline{2 \alpha'_{ik} \beta'_{rs} a^2_{b'} = p'_{ik} q'_{rs} + p'_{rs} q'_{ik} .} \tag{12}$$

Die Gleichungen werden identisch erfüllt, wenn wir setzen (vgl. Clebsch-Lindemann, Vorles. II. Bd., S. 151)

$$\left.\begin{cases} \underline{p'_{ik} q'_{rs} = \alpha'_{ik} \beta'_{rs} a^2_{b'} - \theta_{ik,rs}} \\ \underline{p'_{rs} q'_{ik} = \gamma'_{ik} \delta'_{rs} c^2_{d'} + \theta_{ik,rs}} \end{cases}\right\} \theta_{ik,ik} = 0 , \tag{13}$$

dann folgt durch Multiplikation wegen (11) und (12)

$$\theta^2_{ik,rs} = \alpha'_{ik} \beta'_{rs} a^2_{b'} \gamma'_{ik} \delta'_{rs} c^2_{d'} - \alpha'_{ik} \beta'_{ik} a^2_{b'} \gamma'_{rs} \delta'_{rs} c^2_{d'} ,$$

womit $\theta_{ik,rs}$ bestimmt ist. Nach (13) ist dann p und q leicht zu finden.

Ein Büschel KB kann auch als Schnitt von $4Ke$ $(\varrho, \sigma, \mu, \nu)$ gegeben sein. Aus der Matrix

$$|\varrho, \sigma, \mu, \nu|$$

erhalten wir dann ebenfalls $\binom{6}{4} = 15$ homogene Koordinaten, die Komplexebenenkoordinaten des Büschels. Wir bezeichnen sie mit $\psi_{ik,mn,rs,\sigma\tau}$. Wie wir später sehen werden, bestehen zwischen ihnen und den vorigen $\varphi_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ die Relationen

$$\underline{\varphi_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \psi_{ik,mn,rs,\sigma\tau} = \psi'_{\alpha\beta,\gamma\delta} ,} \tag{14}$$

wo die Indizespaare rechts und links komplementär sind, d. h. zusammen alle sechs möglichen Paare ik auftreten.

Die Diskriminante des Büschels KB wird dann:

$$D = 4 \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma \varphi_{ik,mn,rs,\sigma\tau} \varphi'_{ik,mn,rs,\sigma\tau} ,$$

oder

$$\underline{D = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & \cdot & \cdot \\ A_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{41} & \cdot & \cdot & A_{44} \end{vmatrix} ,} \tag{15}$$

wo die A_{ik} die simultanen Invarianten der $4\,Ke$ sind. Es stimmt dieses Resultat natürlich mit früherem. Die $4\,Ke$ schneiden sich in einem Büschel, welches $S_{20}=0$ in den Leitlinien des zugehörigen Netzes trifft. Diese Leitlinien kann man daher auch finden, wenn man zuerst die $4\,Ke$ mit dem $S_{20}=0$ zum Schnitt bringt, wodurch $4\,K^1$ entstehen; die zwei Transversalen dieser $4\,K^1$ sind dann die gesuchten Leitlinien; sie fallen zusammen, wenn $D=0$ ist, wie durch (15) gezeigt wurde.

Alles bisher Gesagte überträgt sich natürlich dual im Komplexraum auf die Komplexgebüsche KG.

Es sei ein Büschel durch $K^1(p)$ und $K^1(q)$, ferner ein Komplexgebüsch durch $K^1(q)$, $K^1(r)$, $K^1(s)$ und $K^1(t)$ gegeben. Die sechsreihige Determinante

$$(p_{ik}\,q_{ik}\,q_{ik}\,r_{ik}\,s_{ik}\,t_{ik})$$

verschwindet dann identisch. Entwickeln wir sie nach den ersten zwei und letzten vier Zeilen und führen die Koordinaten $\varphi_{ik,rs}$ und $\psi'_{ik,rs}=\varphi_{\alpha\beta,\gamma\delta,mn,\sigma\tau}$ des KB und KG ein, so ergibt sich die Bedingung, daß sich ein $KB(a,\alpha)$ und ein $KG(m',\mu')$ schneiden:

$$a^2_{m'}\,\alpha^2_{\mu'}=0\,. \tag{16}$$

Wenn wir hier $m'_{ik}\,\mu'_{rs}$ veränderlich lassen, aber so, daß zwischen ihnen die obenerwähnten Relationen bestehen, so können wir (16) auch als „Gleichung des Komplexbüschels" $(a\,\alpha)$ definieren. Das KB ist hier also dargestellt durch alle es schneidenden Komplexgebüsche.

Wenn wir die Identitäten zwischen den $m'_{ik}\,\mu'_{rs}$ fallen lassen, so stellt (16) ein lineares System von ∞^8 Büscheln, einen „Büschelkomplex" dar. Wir führen dies jedoch nicht weiter aus, da sich dieser Begriff ganz mit dem des linearen Geradenkomplexes im R_5 deckt.

Bestimmen $K^1(p)$ und $K^1(q)$ das Büschel $(a\,\alpha)$, so schneiden sich die Polar-Ke von $K^1(p)$ und $K^1(q)$ bezüglich $S_{20}=0$ in einem Komplexgebüsch, dem ergänzenden Gebiet des Büschels $(a\,\alpha)$. Daraus ergibt sich der Satz:

„Sind $\varphi_{ik,rs}$ Koordinaten eines Büschels, so hat das ergänzende Gebiet dieselben Koordinaten."

Zwei Büschel (a, α) und (b, β) bestimmen ein KG. Dessen Gleichung erhält man, wenn $\psi'_{ik, rs, mn, \sigma\tau}$ die Koordinaten eines veränderlichen KB sind

$$\underline{\psi_a'^2 \psi_\alpha'^2 \psi_b'^2 \psi_\beta'^2 = 0 .} \tag{17}$$

Es sei durch $\pi^2_{\alpha'} \pi^2_{\alpha'} = 0$ ein S_2 gegeben. Ein durch $K^1(p)$ und $K^1(q)$ bestimmtes KB schneidet $S_2 = 0$ in $2\, K^1_\varkappa \ldots \varkappa_1 K^1(p) + \varkappa_2 K^1(q) = 0$, wo die $\varkappa_i$ aus

$$\varkappa_1^2 p^2_{a'} p^2_{\alpha'} + 2 \varkappa_1 \varkappa_2 p^2_{a'} q^2_{\alpha'} + \varkappa_2^2 q^2_{a'} q^2_{\alpha'} = 0$$

zu berechnen sind. Fallen die beiden Schnittkomplexe zusammen, so „berührt“ das Büschel das $S_2 = 0$. Die Bedingung hierfür wird:

$$p^2_{a'} p^2_{\alpha'} q^2_{b'} q^2_{\beta'} - p^2_{a'} q^2_{\alpha'} p^2_{b'} q^2_{\beta'} = 0 ,$$

oder für $m_{ik} \mu_{rs} = (p, q)_{ik, rs}$ als Koordinaten des Büschels:

$$\underline{m^2_{a'} \mu^2_{\beta'} n^2_{\alpha'} \nu^2_{b'} = 0 .} \tag{18}$$

Für veränderliche $(m \mu)$ ist dies die Gleichung von $S_2 = 0$ in Büschelkoordinaten.

Diese Gleichung wird für S_{20} mit der Diskriminante von $KB(m \mu)$ identisch.

3. Das Komplexnetz.

$3 K^1$ (p, q und r), die unabhängig voneinander, bestimmen ein Komplexnetz, oder wie wir in folgendem kurz sagen wollen, ein Netz N. Analog dem Obigen ergeben sich aus der Matrix $|p, q, r| \binom{6}{3} = 20$ homogene Koordinaten des Netzes. Wir setzen für diese wieder

$$\underline{\varphi_{ik, mn, rs} = |p_{ik} q_{mn} r_{rs}| = a_{ik} b_{mn} c_{rs} .} \tag{19}$$

Dies sind die Komplexkoordinaten des Netzes, welches sich selbst dual gegenübersteht im Komplexraum, ähnlich denen der Geraden im R_3. Wir können ein Netz auch als Schnitt dreier Ke bestimmen und erhalten wie oben 20 homogene Komplexebenenkoordinaten $\psi_{ik, rs, mn}$ des Netzes. Alle diese 20 Größen sind aber nur zehn unabhängigen äquivalent, so daß es ∞^9 Netze überhaupt gibt.

Ein N kann auch gegeben werden durch ein Komplexbüschel $KB(\theta_{ik,rs} = m_{ik}\mu_{rs})$ und einen $K^1(r)$. Ist das KB durch $K^1(p)$ und $K^1(q)$ bestimmt, so ist

$$\begin{vmatrix} p_{ik} & q_{ik} \\ p_{mn} & q_{mn} \end{vmatrix} = \theta_{ik,mn} = m_{ik}\mu_{mn}\,.$$

Somit wird dann für dieses Netz:

$$(20) \qquad \underline{\varphi_{ik,mn,rs} = \theta_{ik,mn} r_{rs} + \theta_{mn,rs} r_{ik} + \theta_{rs,ik} r_{mn}\,.}$$

Ist ein zweites Netz durch die $K^1(r, s, t)$ gegeben, so wird wegen $|p\,q\,r\,r\,s\,t| \equiv 0$ nach dreireihigen Minoren entwickelt:

$$\Sigma\Sigma\Sigma\, a_{ik} b_{mn} c_{rs} \alpha'_{ik} \beta'_{mn} \gamma'_{rs} = 0$$

oder

$$(21) \qquad \underline{a^2_{\alpha'} b^2_{\beta'} c^2_{\gamma'} = 0\,,}$$

wo (α, β, γ) die Koordinaten des Netzes (r, s, t) sind. Dies ist also die Bedingung, daß sich zwei Netze nach einem K^1 schneiden. Ist das Netz (α, β, γ) durch den $K^1(s)$ und das Büschel $KB(m\mu)$ gegeben, so wird diese Bedingung nach (20):

$$\Sigma\Sigma\Sigma\, a_{ik} b_{mn} c_{rs} (\theta'_{ik,mn} s'_{rs} + \theta'_{mn,rs} s'_{ik} + \theta'_{rs,ik} s'_{mn}) = 0$$
$$a^2_{m'} b^2_{\mu'} c^2_{s'} + a^2_{s'} b^2_{m'} c^2_{\mu'} + a^2_{\mu'} b^2_{s'} c^2_{m'} = 0\,.$$

Dies gibt nach entsprechender Vertauschung von a, b und c:

$$(22) \qquad \underline{a^2_{m'} b^2_{\mu'} c^2_{s'} = 0\,.}$$

Diese Gleichung gibt, wenn wir $(m\,\mu)$ variabel nehmen und s_{ik} als Koordinaten eines K^1 auffassen, wobei dann $(a\,b\,c)$ die Komplexkoordinaten eines N sind, die Gleichung des durch $N(a\,b\,c)$ und $K^1(s)$ bestimmten Komplexgebüsches.

Ist in (22) $(a\,b\,c)$ variabel, so wird dies die Gleichung des durch das Büschel $(m\,\mu)$ und den $K^1(s)$ bestimmten Netzes; nehmen wir aber $(m\,\mu)$ als Koordinaten eines Gebüsches und s_{ik} als die einer $Ke(s)$, so wird (22) die Gleichung des Netzes, welches durch den Schnitt dieser Gebiete entsteht.

Lassen wir in (22) die $(a\,b\,c)$ variabel, so erhalten wir die Gleichung des Netzes (α, β, γ), welches so durch alle es schneidenden Netze dargestellt wird. Die $(a\,b\,c)$ erfüllen dann natürlich die zwischen ihnen bestehenden Relationen. Lassen wir diese fallen, so erhalten wir ein lineares System von ∞^9 Netzen, einen Netzkomplex, der sich mit dem Begriff des linearen Ebenenkomplexes im R_5 deckt.

Ist in (22) $(m\,\mu)$ veränderlich, aber als Koordinaten eines KG gedacht, so stellt (22) die Gleichung des Büschels dar, welches entsteht, wenn man das Netz $(a\,b\,c)$ durch die $Ke(s)$ schneidet.

Ist endlich s_{ik} in (22) variabel, so erhält man entweder den Schnittkomplex des Netzes $(a\,b\,c)$ mit dem Büschel $(m\,\mu)$ oder die Gleichung der durch das Netz $(a\,b\,c)$ und das $KB(m\,\mu)$ bestimmten Komplexebene.

Wir fügen dem schließlich die Gleichung des durch $K^1(p)$, $K^1(q)$ und $K^1(r)$ bestimmten Netzes an:

$$a_{p'}^2\, b_{q'}^2\, c_{r'}^2 = 0\,. \tag{23}$$

Eine $Ke(s)$ schneidet das Netz $(a\,b\,c)$ nach einem Büschel, dessen Gleichung nach (22) ist:

$$a_{m'}^2\, b_{\mu'}^2\, c_{s'}^2 = 0\,.$$

Seine Koordinaten $\varphi_{ik,rs}$ sind also

$$\varphi_{ik,rs} = a_{ik}\, b_{rs}\, c_{s'}^2\,;$$

führt man diese $\varphi_{ik,rs}$ in Gleichung (8) ein, so ergibt sich die Gleichung der Leitlinien dieses Schnittbüschels in Komplexebenenkoordinaten τ_{ik}

$$a_{\alpha'}^2\, \tau_{b'}^2\, \tau_{\beta'}^2\, c_{s'}^2\, \gamma_{s'}^2 = 0\,, \tag{24}$$

d. h. $Ke(s)$ gehört auch einem Komplexsystem 2. Klasse an, wenn $Ke(\tau)$ gegeben ist. Durch das Netz wird also zwischen den Ke eine quadratische Verwandtschaft im Komplexraum vermittelt, deren Gleichung (24) ist. Lassen wir für diese Gleichung noch $s_{s'}^2 = 0$ und $\tau_{\tau'}^2 = 0$ gelten, so entsteht eine quadratische Verwandtschaft zwischen den Geraden des Raumes, die so durch jedes Netz definiert ist. Geometrisch ist dies sehr einfach einzusehen. Das Netz gibt mit einer Geraden p^2 zusammen als K^{10} ein System von $4\,K^1$; die beiden gemeinsamen Strahlen dieses Gebüsches sind die p^2 entsprechenden.

Diese beiden Geraden erhält man aber auch, wenn man die Fläche 2. Ordnung F_2, welche durch das Netz bestimmt ist, mit p^2 zum Schnitt bringt. Die K^{10} des Netzes bilden die Regelschar S_1 auf F_2. Durch die erhaltenen Schnittpunkte gehen von der Schar S_2 je eine Gerade, welche so zu p^2 zugeordnet ist. p^2 berührt F_2, wenn diese beiden Geraden zusammenfallen. Dann muß das durch (22) gegebene Schnittbüschel speziell sein, d. h. seine Diskriminante muß verschwinden.

Dies gibt:

$$\underline{a_{\alpha'}^2 b_{\beta'}^2 c_{s'}^2 \gamma_{s'}^2 = 0\,.} \tag{25}$$

Wir sagen dann, die $K\,e(s)$ „berührt" das Netz und nennen (25) die „Gleichung der Regelschar" des Netzes $(a\,b\,c)$. Nehmen wir $s_{s'}^2 = 0$ hinzu, so ist (25) auch die Gleichung der Fläche 2. Ordnung F_2 in Linienkoordinaten. Wie man von dieser auf die Gleichung von $\mathfrak{F}_2$ in Punkt- und Ebenenkoordinaten kommt, soll später ausgeführt werden.

Die Diskriminante des Netzes $(a\,b\,c)$ war

$$\varDelta = a_{\alpha'}^2 b_{\beta'}^2 c_{\gamma'}^2\,;$$

dies ist nach früherem mit der zweiten Wurzel aus der Diskriminante der F_2 identisch, denn es ist auch

$$\varDelta = |\,A_{11}\ A_{22}\ A_{33}\,|\,.$$

Wir behandeln noch kurz die verschiedenen Ausartungen, welche F_2 als durch das Netz gegeben erleiden kann.

Ist $\varDelta = 0$, so heißt das, daß das Netz $(a\,b\,c)$ von seinem ergänzenden geschnitten wird. F_2 zerfällt in ein Ebenenpaar mit einem inzident liegenden Punktepaar. (25) wird ein vollständiges Quadrat und gibt die Schnittlinie der beiden Ebenen oder, was damit identisch ist, die Verbindungslinie der beiden Punkte. Das analytische Kennzeichen für ein derartiges Netz ist also

$$\varDelta = 0\,.$$

Ist $\varDelta = 0$ und (25) $\equiv 0$, so ist F_2 eine Doppelebene mit inzidentem Doppelpunkt. (24) wird ein volles Quadrat in den Variablen τ_{ik}. Es verschwinden dann auch die ersten Minoren in $\varDelta$.

Ist endlich auch (24) $\equiv 0$, verschwinden also auch die zweiten Minoren in Δ, so besteht das Netz aus lauter K^{10}. (Vgl. Zindler, Liniengeom. I, § 79.)

Wir kommen nun noch auf die Beziehung zwischen einem Netz und der dadurch definierten F_2 zu sprechen. Es gibt ∞^9 Netze und ebensoviele $\mathfrak{F}_2$ im R_3. Wir können daher eine $\mathfrak{F}_2$ nicht nur im R_9, sondern auch im R_5 abbilden. Durch diese letztere Abbildung werden insbesondere die beiden Regelscharen der Erzeugenden auf F_2 getrennt und als einander ergänzende Netze dargestellt. Die Koordinaten (abc) eines Netzes von Komplexen können daher auch als Koordinaten einer Regelschar definiert werden. Wir sehen also hier den engen Zusammenhang zwischen der Geometrie der $\mathfrak{F}_2$ als Regelflächen und den linearen Ebenenkomplexen des R_5. Hier soll dies jedoch nicht weiter ausgeführt werden.

Wenn sich zwei Komplexnetze N_1 und N_2 schneiden, so haben sie einen $K^1(p)$ gemeinsam. Diesem $K^1(p)$ gehören, da er in N_1 und N_2 gelegen ist, nicht nur die Geraden der Schar S_2 von $\mathfrak{F}_2$ (durch N_1 bestimmt), sondern auch die Geraden der Schar S_2' von F_2' (durch N_2 bestimmt) an. Da sich nun aber N_1 und N_2 schneiden, so liegen sie auch in derselben Ke und die K^{10} dieser Ke enthalten die Scharen S_1 und S_1' von F_1 und F_1'. Alle K^{10} in Ke bilden einen K^1. Daher folgt der Satz:

„Gehört je eine Schar von Erzeugenden zweier F_2 einem K_1 an, so gehören die beiden anderen Scharen ebenfalls einem K_1 an, welcher mit dem ersten involutorisch liegt.“

Nehmen wir bei diesen Überlegungen statt N_2 das ergänzende Netz von N_1, so wird die Bedingung, daß sich beide schneiden, mit der gleich Null gesetzten Diskriminante identisch. Also:

„Beide Scharen von Erzeugenden einer nicht zerfallenden $\mathfrak{F}_2$ können niemals einem linearen Komplexe angehören.“

Es ist dies auch geometrisch leicht einzusehen. Nehmen wir an, alle Gerade von S_1 und S_2 gehören dem $K^1(p)$ an; dann suchen wir zu einer Geraden die konjugierte bezüglich $K^1(p)$ und erhalten diese als identisch mit der konjugierten Polaren bezüglich F_2. Daraus folgt, daß jede

Tangente der F_2 dem $K^1(p)$ angehören würde. Durch einen Punkt ginge dann ein Kegel von Komplexlinien und nicht eine Ebene.

Wir stellen schießlich noch die Gleichung eines Komplexsystems 2. Ordnung $S_2 = 0$ in Netzkoordinaten auf. Ist $\varkappa_1 p_{\nu'}^2 + \varkappa_2 q_{\nu'}^2 + \varkappa_3 r_{\nu'}^2 = 0$ ein auf $S_2 = 0$ liegender K^1 des Netzes, so wird:

$$(26)\quad \underline{(\varkappa_1 p_{m'}^2 + \varkappa_2 q_{m'}^2 + \varkappa_3 r_{m'}^2)(\varkappa_1 p_{\mu'}^2 + \varkappa_2 q_{\mu'}^2 + \varkappa_3 r_{\mu'}^2) = 0},$$

wo $S_2 \equiv \pi_{m'}^2 \pi_{\mu'}^2 = 0$ ist. Durch das Netz wird also eine quadratische Menge von $\infty^2 K^1$ aus dem $S_2 = 0$ ausgeschnitten. Diese Menge degeneriert, wenn die Diskriminante von (26) verschwindet. Wir sagen dann, das Netz berührt das $S_2 = 0$. Die Bedingung hierfür wird

$$\begin{vmatrix} p_{m'}^2 & q_{m'}^2 & r_{m'}^2 \\ p_{n'}^2 & q_{n'}^2 & r_{n'}^2 \\ p_{l'}^2 & q_{l'}^2 & r_{l'}^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_{\mu'}^2 & q_{\mu'}^2 & r_{\mu'}^2 \\ p_{\nu'}^2 & q_{\nu'}^2 & r_{\nu'}^2 \\ p_{\lambda'}^2 & q_{\lambda'}^2 & r_{\lambda'}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Führt man hier die Netzkoordinaten $(a\,b\,c) = (\alpha\,\beta\,\gamma)$ ein, so erhält man als gesuchte Gleichung

$$(27)\quad \underline{a_{m'}^2 b_{n'}^2 c_{l'}^2 \alpha_{\mu'}^2 \beta_{\nu'}^2 \gamma_{\lambda'}^2 = 0}.$$

Nimmt man statt $S_2 = 0$ das identische System $S_{20} = 0$, so kommt man auf die Diskriminante.

III. Abschnitt.

Die quadratischen Komplexe.

1. Allgemeines.

Wir sollten eigentlich diesen Abschnitt anders überschreiben, da wir größtenteils quadratische Systeme von Komplexen behandeln. Doch hängen diese mit den Geradenkomplexen 2. Grades derart innig zusammen, daß wir den gebräuchlichen Namen obenan stellen.

Es sei $S_2 \equiv \pi_{\alpha'}^2 \pi_{\alpha'}^2 = 0$ die Gleichung eines Komplexsystems 2. Ordnung. Ein Komplexbüschel $(K^1(p), K^1(q))$ schneidet S_2 in zwei K^1 $\varkappa_1 K^1(p) + \varkappa_2 K^1(q) = 0$, wo für die $\varkappa$ die Gleichung besteht:

$$(1) \qquad \underline{\varkappa_1^2 p_{\alpha'}^2 p_{\alpha'}^2 + 2\varkappa_1 \varkappa_2 p_{\alpha'}^2 q_{\alpha'}^2 + \varkappa_2^2 q_{\alpha'}^2 q_{\alpha'}^2 = 0}.$$

Die beiden Schnittkomplexe liegen zu $K^1(p)$ und $K^1(q)$ harmonisch, wenn $p_{\alpha'}^2 q_{\alpha'}^2 = 0$ ist, d. h. wenn man $K^1(p)$ gegeben annimmt, so erhält man als Ort von $K^1(q)$ eine Ke, welche wir die erste Polar-Ke des $K^1(p)$ nennen. Ihre Gleichung wird also in Variablen π:

$$(2) \qquad \underline{S_{\pi p}^2 \equiv \pi_{\alpha'}^2 p_{\alpha'}^2 = 0}.$$

Die K^{10} dieser Ke bilden einen K^1, den wir analog den „ersten Polarkomplex“ von $K^1(p)$ bezüglich $S_2 = 0$ nennen. Seine Gleichung ist in Veränderlichen τ:

$$(3) \qquad \underline{K_{\pi p}^2 \equiv \tau_{\alpha'}^2 p_{\alpha'}^2 = 0}.$$

Wenn die Diskriminante von S_2 nicht verschwindet, so gehört zu jeder Ke ein Polkomplex $K^1(p)$; sind τ_{ik} die Koordinaten der Ke, so bestehen nach (3) die sechs Gleichungen

$$\lambda \tau_{ik} = a_{ik} \alpha_{p'}^2;$$

eliminiert man aus dieser und $\tau_{p'}^2 = 0$ die p_{ik} und λ, so wird:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a_{12}\alpha_{12} & a_{12}\alpha_{13} & a_{12}\alpha_{14} & a_{12}\alpha_{23} & a_{12}\alpha_{34} & a_{12}\alpha_{42} & \tau_{12} \\ a_{13}\alpha_{12} & a_{13}\alpha_{14} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \tau_{13} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \tau_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \tau_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \tau_{34} \\ a_{42}\alpha_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \tau_{42} \\ \tau_{12} & \tau_{13} & \tau_{14} & \tau_{23} & \tau_{34} & \tau_{42} & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Dies ist also die Gleichung von $S_2 = 0$ in Komplexebenenkoordinaten. Wir werden später für dieselbe eine einfachere Form angeben.

Nehmen wir statt $S_2 = 0$ das $S_{20} = 0$, so erhalten wir aus (4) die früher angegebene Form für $\Sigma_{20} = 0$ durch $\tau_{\tau'}^2 = 0$.

Durch den Schnitt von S_2 und S_{20} entsteht ein quadratisches System von $\infty^3 K^{10}$, welche wir uns aber durch ihre Achsen ersetzen können, somit ein quadratischer Komplex. Ein solcher ist daher nach unserer Auffassung als Komplexmenge aufzufassen, welche zwei Systemen 2. Ordnung gemeinsam ist; er ist also als Komplexgebilde von der 4. Ordnung.

Wenn wir uns nur auf die K^{10} beschränken, was also z. B. bei der Untersuchung eines quadratischen Komplexes geschieht, so können wir, da für die Variablen π_{ik} dann immer $\pi_{\pi'}^2 = 0$ ist, statt $\pi_{\alpha'}^2 \pi_{\alpha'}^2 = 0$ auch $\pi_{\alpha'}^2 \pi_{\alpha'}^2 + \lambda \pi_{\pi'}^2 = 0$ schreiben; hierdurch wird auch die bekannte Unbestimmtheit in der Gleichungsform eines quadratischen Komplexes geometrisch erklärlich. Wir kommen weiter unten darauf noch zurück.

2. Die Diskriminante.

Diese ist eine Invariante des S_2, und da wir S_2 durch das symbolische Produkt zweier K^1 darstellen, muß auch die Diskriminante Δ nach dem im Abschnitt I Gesagten symbolisch durch Formen $a_{b'}^2$ dargestellt werden können.

Wir setzen

$$(5) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{12}\,\alpha_{12} & a_{12}\,\alpha_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{12}\,\alpha_{42} \\ b_{13}\,\beta_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{14}\,\gamma_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{23}\,\delta_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{34}\,\varepsilon_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{42}\,\eta_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f_{42}\,\eta_{42} \end{vmatrix}.$$

Hierbei sind (c, γ), $(d, \delta)\dots$ mit (a, α) gleichbedeutend. Nun folgt daraus weiter, wenn wir setzen:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_\alpha &= \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{23} & \alpha_{34} & \alpha_{42} \\ \beta_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \eta_{42} \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} \alpha'_{12} & \alpha'_{13} & \alpha'_{14} & \alpha'_{23} & \alpha'_{34} & \alpha'_{42} \\ \beta'_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma'_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta'_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon'_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta'_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \eta'_{42} \end{vmatrix} = -\Delta_{\alpha'}. \end{aligned} \right.$$

$$\Delta = a_{12}\, b_{13}\, c_{14}\, d_{23}\, e_{34}\, f_{42}\, \Delta_\alpha$$

oder durch Vertauschungen:

$$\Delta = \frac{1}{6!}\,\Delta_a\,\Delta_\alpha = -\frac{1}{6!}\,\Delta_a\,\Delta_{\alpha'};$$

setzen wir $2^6 \cdot \Delta_a\,\Delta_{\alpha'} = D_6$, so folgt:

$$(7) \qquad \underline{\Delta = -\frac{1}{2^6 \cdot 6!}\,D_6\,.}$$

Wenn wir bei Bildung des Produktes von $\Delta_a \Delta_{\alpha'}$ den Multiplikationssatz entsprechend auf die sechsreihigen Determinanten anwenden, so erhalten wir

$$(8) \qquad D_6 = \begin{vmatrix} a^2_{\alpha'} & a^2_{\beta'} & a^2_{\gamma'} & a^2_{\delta'} & a^2_{\varepsilon'} & a^2_{\eta'} \\ b^2_{\alpha'} & b^2_{\beta'} & b^2_{\gamma'} & b^2_{\delta'} & b^2_{\varepsilon'} & b^2_{\eta'} \\ c^2_{\alpha'} & . & . & . & . & . \\ d^2_{\alpha'} & . & . & . & . & . \\ e^2_{\alpha'} & . & . & . & . & . \\ f^2_{\alpha'} & . & . & . & . & f^2_{\eta'} \end{vmatrix}.$$

Hierdurch ist Δ schon in der verlangten symbolischen Form dargestellt.

D_6 ist eine symmetrische Determinante, zu deren Berechnung wir jetzt schreiten. Lassen wir in D_6 eine Zeile und eine Kolonne, die sich in einem Glied der Hauptdiagonale schneiden, weg (also z. B. die letzte Zeile und Kolonne), so entsteht eine neue Determinante D_5, welche die Koeffizienten von $S_2 = 0$ nur mehr im fünften Grad enthält. Lassen wir in D_5 wieder die letzte Zeile und Kolonne weg, so entsteht D_4. Dies fortsetzend erhalten wir D_3, D_2 und endlich $D_1 = a^2_{\alpha'}$. Diese D_i sind hierbei wirkliche Zahlen und nicht symbolische Faktoren.

Aus den Koeffizienten a_{ik} und α_{ik} lassen sich nun eine Reihe von Formen bilden, wenn wir berücksichtigen, daß immer erst ein a_{ik} und α_{ik} oder ein b_{ik} und β_{ik} usw. zusammen eine wirkliche Zahl geben. Diese Formen sind ähnlich gebaut wie die früher von uns betrachteten „Ketten“; nur sind die einzelnen Faktoren hier quadratisch. Diese Formen sind:

$$(9) \qquad \begin{cases} A_1 = a^2_{\alpha'}, \\ A_2 = a^2_{\beta'} b^2_{\alpha'}, \\ A_3 = a^2_{\beta'} b^2_{\gamma'} c^2_{\alpha'}, \\ A_4 = a^2_{\beta'} b^2_{\gamma'} c^2_{\delta'} d^2_{\alpha'}. \\ \vdots \end{cases}$$

Sie lassen sich formal beliebig fortsetzen. Wir werden aber später sehen, daß von A_7 an alle höheren A_i durch die ersten sechs ausdrückbar sind. Wie man leicht übersieht, gibt es keine anderen invarianten Formen von S_2 als diese A_i.

Wir drücken nun die D_i durch diese A_i aus und beginnen mit D_6. Entwickelt man D_6 nach den ersten zwei Reihen und berücksichtigt die Vertauschbarkeit von a, b, c, ... und α, β, γ, ..., wobei noch zu betonen ist, daß man mit a und b auch gleichzeitig α und β vertauschen muß, so wird:

$$D_6 = A_1 D_5 - 5 A_2 D_4 + 20 R ,$$

wo

$$R = a_{\beta'}^2 c_{\alpha'}^2 \begin{vmatrix} b_{\gamma'}^2 & b_{\delta'}^2 & b_{\varepsilon'}^2 & b_{\eta'}^2 \\ d_{\gamma'}^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{\gamma'}^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{\gamma'}^2 & \cdot & \cdot & f_{\eta'}^2 \end{vmatrix} .$$

Es entsteht also R aus D_4, wenn man eine Reihe ungestrichene Symbole, hier die c_{ik}, durch neue b_{ik} ersetzt und gleichzeitig mit $a_{\beta'}^2 c_{\alpha'}^2$ multipliziert. Diesen Prozeß drücken wir durch δ aus. Also ist $R = \delta D_4$. Auf die A_i angewendet, gibt er die Gleichung

$$(10) \qquad \underline{\delta A_i = A_{i+2}} .$$

Demzufolge erhält man, wenn man jedesmal nach zwei Reihen gleichzeitig entwickelt:

$$(11) \qquad \begin{cases} D_6 = A_1 D_5 - 5 A_2 D_4 + 20 \delta D_4 , \\ D_5 = A_1 D_4 - 4 A_2 D_3 + 12 \delta D_3 , \\ D_4 = A_1 D_3 - 3 A_2 D_2 + 6 \delta D_2 , \\ D_3 = A_1 D_2 - 2 A_2 D_1 + 2 \delta D_1 , \\ D_2 = A_1 D_1 - A_2 , \\ D_1 = A_1 . \end{cases}$$

Ebenso wie die A_i können wir uns die D_i beliebig nach oben fortgesetzt denken. Dann erhalten wir allgemein:

$$(12) \qquad \underline{D_n = A_1 D_{n-1} - (n-1) A_2 D_{n-2} + (n-1)(n-2) \delta D_{n-2}} .$$

Wenden wir auf diese Gleichung den δ-Prozeß an, so erhalten wir:

$$(13)\quad \underline{\delta D_n = A_3 D_{n-1} - (n-1) A_4 D_{n-2} + (n-1)(n-2)\,\delta\delta D_{n-2}}\,.$$

Nach dieser Gleichung können wir (12) weiter ausführen. Es wird:

$$(14)\quad \begin{cases} D_1 = A_1\,; \\ D_2 = A_1 D_1 - A_2\,, \\ D_3 = A_1 D_2 - 2A_2 D_1 + 2A_3\,, \\ D_4 = A_1 D_3 - 3A_2 D_2 + 6A_3 D_1 - 6A_4\,, \\ D_5 = A_1 D_4 - 4A_2 D_3 + 12A_3 D_2 - 24A_4 D_1 + 24A_5\,, \\ D_6 = A_1 D_5 - 5A_2 D_4 + 20A_3 D_3 - 60A_4 D_2 \\ \qquad\qquad + 120A_5 A_1 - 120A_6\,. \end{cases}$$

Wir setzen nun

$$(15)\quad \underline{\frac{D_i}{i!} = M_i}\,,$$

dann lassen sich diese Formeln zusammenfassen in:

$$(16)\quad \underline{iM_i = A_1 M_{i-1} - A_2 M_{i-2} + A_3 M_{i-3} - \dots + (-1)^{i+1} A_i}\,.$$

Ersetzt man in (14) die höheren D_i durch die niederen, so erhalten wir schließlich:

$$(17)\quad \begin{cases} D_1 = A_1\,, \\ D_2 = A_1^2 - A_2\,, \\ D_3 = A_1^3 - 3A_1A_2 + 2A_3\,, \\ D_4 = A_1^4 - 6A_1^2A_2 + 8A_1A_3 + 3A_2^2 - 6A_4\,, \\ D_5 = A_1^5 - 10A_1^3A_2 + 20A_1^2A_3 + 15A_1A_2^2 - 30A_1A_4 \\ \qquad - 20A_2A_3 + 24A_5\,, \\ D_6 = A_1^6 - 15A_1^4A_2 + 40A_1^3A_3 + 45A_1^2A_2^2 - 90A_1^2A_4 \\ \qquad - 120A_1A_2A_3 + 144A_1A_5 - 15A_2^3 + 90A_2A_4 \\ \qquad + 40A_3^2 - 120A_6\,. \end{cases}$$

Diese D_i sind also jetzt durch die A_i ausgedrückt. In den Ausdrücken rechts sind die Summen der positiven und negativen Koeffizienten gleich. Für $A_i = \lambda^i$ verschwinden also alle D_i $(i > 1)$.

3. Die kovarianten Systeme.

Wenn wir in A_i statt a und α Veränderliche π schreiben, so entstehen Strahlformen, welche gleich Null gesetzt zu S_2 kovariante Komplexsysteme zweiter Ordnung liefern. Diese sind:

$$(18) \quad \begin{cases} S^1 \equiv \pi^2_{\pi'} = 0\,, \\ S^2 \equiv \pi^2_{a'}\pi^2_{\alpha'} = 0\,, \\ S^3 \equiv \pi^2_{\beta'} b^2_{\gamma'} c^2_{\pi'} = 0\,, \\ S^4 \equiv \pi^2_{\beta'} b^2_{\gamma'} c^2_{\delta'} d^2_{\pi'} = 0\,, \\ S^5 \equiv \pi^2_{\beta'} b^2_{\gamma'} c^2_{\delta'} d^2_{\varepsilon'} e^2_{\pi'} = 0\,. \end{cases}$$
$$\vdots$$

Zu bemerken ist, daß das erste dieser Systeme mit dem identischen zusammenfällt.

Zu einem gegebenen $K^1(p)$ gibt es dann eine Reihe von Polarkomplexebenen, die sich aus (18) leicht ableiten lassen:

$$(19) \quad \begin{cases} S^1_{\pi p} \equiv \pi^2_{p'} = 0\,, \\ S^2_{\pi p} \equiv \pi^2_{a'} p^2_{\alpha'} = 0\,, \\ S^3_{\pi p} \equiv \pi^2_{\beta'} b^2_{\gamma'} c^2_{p'} = 0\,. \end{cases}$$
$$\vdots$$

Wir setzen nun im folgenden voraus, daß D_6 nicht verschwindet. Es entspricht dann nicht nur einem $K^1(p)$ eine Polarkomplexebene $\pi^2_{\alpha'} p^2_{\alpha'} = 0$, sondern auch umgekehrt jeder $Ke(\varrho)$ ein Polkomplex. Nehmen wir nun diese $Ke(\varrho)$ gegeben an und suchen den zugehörigen Polkomplex $K^1(p)$; wir setzen dann, wenn τ ein Proportionalitätsfaktor ist: $\tau\,\varrho_{ik} = a_{ik}\,p'^2_{\alpha}$ oder

$$(20) \quad \frac{\tau}{2}\cdot\varrho_{ik} = a_{ik}\sum_{rs} p'_{rs}\,\alpha_{rs}\,.$$

Hier ist die Determinante $\varDelta$ aus den Koeffizienten rechts nach (7):

$$\varDelta = -\frac{1}{2^6 \cdot 6!} D_6 ,$$

oder nach (15)

$$\varDelta = -\frac{1}{2^6} M_6 ,$$

also

$$\varDelta = -\frac{1}{2^6 \cdot 6} (A_1 M_5 - A_2 M_4 + A_3 M_3 - \ldots - A_6) .$$

Aus den sechs Gleichungen (20) erhält man durch Auflösung nach p'_{rs}:

$$\frac{\tau}{2} \sum_{ik} \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{ik} \alpha_{rs}} \varrho_{ik} = \varDelta p'_{rs}$$

und da

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{ik} \alpha_{rs}} = \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial a_{ik} \partial \alpha_{rs}} ,$$

so wird:

$$\varDelta \sigma^2_{p'} = \tau \sum_{ik} \sum_{rs} \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial a_{ik} \partial \alpha_{rs}} \varrho_{ik} \sigma_{rs} . \tag{21}$$

Der Ausdruck rechter Hand entsteht aus $\varDelta$, wenn man a und α durch ϱ und σ ersetzt. Es ist somit:

$$6 M_6 \sigma^2_{p'} = \tau (\varrho^2_{\sigma'} M_5 - S^2_{\varrho\sigma} M_4 + S^3_{\varrho\sigma} M_3 - \ldots - S^6_{\varrho\sigma}) . \tag{22}$$

Diese Gleichung besteht zwischen den drei Größenreihen p, ϱ und σ, wobei jedoch zwischen den ϱ und p die sechs Gleichungen $\tau \varrho_{ik} = a_{ik} p'^2_\alpha$ bestehen. Setzen wir diese Werte von ϱ in (22) ein, so fällt τ weg und es bleibt:

$$6 M_6 \sigma^2_{p'} = S^2_{p\sigma} M_5 - S^3_{p\sigma} M_4 + \ldots - S^7_{p\sigma} . \tag{23}$$

Diese Identität besteht zwischen beliebigen σ und p; wir setzen nun $p'_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial S^n_{\pi q}}{\partial \pi_{ik}}$, dann wird:

$$6 M_6 S^n_{\sigma q} = S^{n+1}_{\sigma q} M_5 - S^{n+2}_{\sigma q} M_4 + \ldots - S^{n+6}_{\sigma q} ,$$

woraus sich schließlich ergibt

$$S^n_{\sigma q} \equiv M_1 S^{n-1}_{\sigma q} - M_2 S^{n-2}_{\sigma q} + \ldots + M_5 S^{n-5}_{\sigma q} - 6 M_6 S^{n-6}_{\sigma q} . \tag{24}$$

Hieraus folgen zwei wichtige Rekursionsformeln. Für $\sigma = q$ wird aus (24):

$$(25) \quad \begin{cases} S^n \equiv M_1 S^{n-1} - M_2 S^{n-2} + M_3 S^{n-3} - M_4 S^{n-4} \\ \qquad + M_5 S^{n-5} - 6 M_6 S^{n-6} . \end{cases}$$

Für $\sigma = a$, $q = \alpha$ wird aus (24):

$$(26) \quad \begin{cases} A_n \equiv M_1 A_{n-1} - M_2 A_{n-2} + M_3 A_{n-3} - M_4 A_{n-4} \\ \qquad + M_5 A_{n-5} - 6 M_6 A_{n-6} . \end{cases}$$

In den beiden letzten Formeln ist natürlich $n > 6$.

Wir ersehen daraus, daß die Reihe der A_i und S^i bezüglich Unabhängigkeit schon bei S^6 und A_6 abbricht. Alle höheren A_i und S^i sind durch die ersten sechs ausdrückbar.

Daraus ergeben sich unmittelbar die beiden folgenden Sätze:

„Alle Invarianten eines Komplexsystems S_2 sind durch die sechs Formen A_i ausdrückbar."

„Alle Strahlformen eines Komplexsystems S_2 sind durch die sechs ersten kovarianten Systeme darstellbar."

Setzen wir in (24) $\sigma = q = \tau$, so ergibt sich die Gleichung des Systems 2. Ordnung $S^2 = 0$ in Komplexebenenkoordinaten für $n = 7$:

$$(27) \quad \begin{cases} \Sigma^2_{\tau\tau} \equiv M_1 S^6_{\tau\tau} - M_2 S^5_{\tau\tau} + M_3 S^4_{\tau\tau} - M_4 S^3_{\tau\tau} \\ \qquad + M_5 S^2_{\tau\tau} - 6 M_6 \tau^2_{\tau'} = 0 . \end{cases}$$

Wir verweilen noch etwas bei den quadratischen Komplexen, die wir kurz mit K^i bezeichnen, insofern sie aus S^i entstanden sind. Zufolge der Unbestimmtheit der Koeffizienten in $K^2 \equiv \pi^2_{a'} \pi^2_{\alpha'} + k \pi^2_{\pi'} = 0$ können wir das volle Invariantensystem eines K^2 auf fünf Formen reduzieren. Die Willkür liegt nämlich nur in den Koeffizienten $a'_{ik} \alpha'_{mn}$ der Glieder mit $\pi_{ik} \pi'_{ik}$; diese Koeffizienten und nur diese kommen in A_1 vor. Wir können dann k so bestimmen, daß A_1 für $\pi^2_{a'} \pi^2_{\alpha'} + k \pi^2_{\pi'} = 0$ gebildet, verschwindet. Wir erhalten so:

$$k = -\tfrac{1}{6} A_1 ,$$

somit wird die „Normalform“ der Gleichung eines K^2:

$$\underline{\pi_{a'}^2 \pi_{\alpha'}^2 - \tfrac{1}{6} A_1 \pi_{\pi'}^2 = 0\,.} \tag{28}$$

Durch die Bedingung $A_1 = 0$ ist jetzt die Unbestimmtheit der Gleichungsform $\pi_{a'}^2 \pi_{\alpha'}^2 = 0$ aufgehoben und auch die Gleichungen (17) bedeutend vereinfacht worden.

4. Die Berechnung der A_n und S^n.

Für die Bildung der S^n in nicht symbolischer Form erhalten wir folgende Formel:

$$\underline{S^n = \frac{1}{8} \sum \frac{\partial S^{n-1}}{\partial \pi_{ik}} \cdot \frac{\partial S^2}{\partial \pi'_{ik}}\,.} \tag{29}$$

Hier sind die S^i als Funktionen 2. Grades in π_{ik} oder π'_{ik} zu betrachten. Die Summe erstreckt sich dann auf alle sechs Indizespaare ik. Hat man so S^3, S^4, ... nacheinander gefunden, so ergeben sich die $A^{(n)}$ durch:

$$\underline{A_n = \frac{1}{16} \sum_{ik} \sum_{rs} \frac{\partial^2 S^n}{\partial \pi_{ik}\, \partial \pi_{rs}} \cdot \frac{\partial^2 S^2}{\partial \pi'_{ik}\, \partial \pi'_{rs}}\,.} \tag{30}$$

Wenn wir der Reihe S^i das identische System als S^1 voranstellen, so gilt (29) für $n \geqq 2$, (30) für $n \geqq 1$.

Daß (30) auch noch für $n = 1$ gültig ist, läßt sich leicht nachweisen. Führen wir für zwei komplementäre Indexgruppen ik und mn das Zeichen $ik \,\#\, mn$ ein, so ist

$$\frac{\partial^2 S^1}{\partial \pi_{ik}\, \partial \pi_{rs}} = \frac{\partial^2 \pi_{\pi'}^2}{\partial \pi_{ik}\, \partial \pi_{rs}} = 4(ik \,\#\, rs)\,.$$

Hierbei bedeutet der zu 4 gesetzte Faktor $(ik \,\#\, rs)$ die Einheit, wenn ik zu rs komplementär ist, sonst immer Null. Danach wird

$$\begin{aligned} A_1 &= \tfrac{1}{16} \sum_{ik} \sum_{rs} \cdot 4(ik \,\#\, rs) \cdot 8\, a_{ik}\, \alpha_{rs} \\ &= 2 \sum_{ik} a_{ik}\, \alpha'_{ik} = a_{\alpha'}^2\,, \quad \text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Ebenso wie wir aus S^2 die A_i und S^n ableiteten, können wir ein System S^i dieser Reihe als Ausgangspunkt nehmen. Wir erhalten natürlich dadurch keine neuen

Formen. Wir bezeichnen mit $S^n(S^i)$ die Form S^n für S^i als Grundform und ebenso mit $A^n(S^i)$ die Form A^n für die Grundform S^i. Dann wird ($n > 2$)

$$S^n(S^i) = \frac{1}{8}\sum_{ik}\frac{\partial S^{n-1}(S^i)}{\partial \pi_{ik}}\cdot\frac{\partial S^i}{\partial \pi'_{ik}},$$

somit:

$$S^3(S^i) = S^{2i-1},$$
$$S^4(S^i) = S^{3i-2},$$
$$\vdots$$

(31) $$\underline{S^n(S^i) = S^{i(n-1)-(n-2)}}.$$

Daraus ergibt sich dann nach (30)

(32) $$\underline{A^n(S^i) = A_{n(i-1)}}.$$

Die Formeln (31) und (32) dienen dazu, um z. B. die Diskriminanten der kovarianten Komplexsysteme S^i zu berechnen. So wird nach (16):

$$D_6(S^i) = 6!\,M_6(S^i) = 5!\,[A_1(S^i)\,M_5(S^i) - \ldots - A_6(S^i)].$$

Hierdurch kommt man auf die höheren A_i, welche nach (26) durch die ersten sechs ausgedrückt werden können.

Wir schließen gleich die Berechnung der S^n und A^n für das identische System an. Hier ist dann $S^2 = \pi^2_{\pi'}$, also

$$S^n = \frac{1}{8}\sum_{ik}\frac{\partial S^{n-1}}{\partial \pi'_{ik}}\cdot 4\,\pi'_{ik} = \frac{1}{2}\sum_{ik}\frac{\partial S^{n-1}}{\partial \pi'_{ik}}\,\pi'_{ik} = S^{n-1},$$

d. h.

(33) $$\underline{S^n(S^{20}) = S^{20} = \pi^2_{\pi'}}.$$

Demzufolge wird dann

$$A^n(S^{20}) = \tfrac{1}{16}\cdot\sum_{ik}\sum_{rs} 4(ik \;\#\; rs)\cdot 4(ik \;\#\; rs) = 6,$$

(34) $\underline{A^n(S^{20}) = 6}.$

Zwei Komplexsysteme 2. Ordnung $S^2 \equiv \pi^2_{a'}\pi^2_{\alpha'} = 0$ und $T^2 \equiv \pi^2_{m'}\pi^2_{\mu'} = 0$ bestimmen ein Büschel solcher Systeme, dessen einzelne Individuen durch

$$L^2 \equiv S^2 + \lambda\,T^2 = 0$$

oder

$$L^2 \equiv \pi_{a'}^2 \pi_{\alpha'}^2 + \lambda \pi_{m'}^2 \pi_{\mu'}^2 = 0 \tag{35}$$

dargestellt sind.

Wir nehmen nun L^2 als Grundform und leiten für diese die Formen S^i und A_i, die wir mit $S^i(L^2)$ und $A^i(L^2)$ bezeichnen, ab. $S^n(L^2)$ ist eine homogene Funktion vom $(n-1)$ten Grade in den Koeffizienten $(a\alpha + \lambda m\mu)$ von L^2. Wir könnten daher den Taylorschen Satz anwenden. Einfacher kommt man jedoch zum Ziel, wenn wir in S^n sukzessive die $(a\alpha)$, $(b\beta)$, $(c\gamma)$ ... durch $(a\alpha + \lambda m\mu)$, $(b\beta + \lambda n\nu)$ ... ersetzen. Es wird so

$$\begin{aligned} S^n(L^2) &= S^n_{n-1,0} + \lambda S^n_{n-2,1} \\ &= S^n_{n-1,0} + 2\lambda S^n_{n-2,1} + \lambda^2 S^n_{n-3,2}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{aligned} S^n(L^2) &= S^n_{n-1,0} + \binom{n-1}{1}\lambda S^n_{n-2,1} \\ &\quad + \binom{n-1}{2}\lambda^2 S^n_{n-3,2} + \dots + \lambda^{n-1} S^n_{0,n-1}. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Hierbei sind die $S^n_{n-i,i-1}$ Formen, welche so wie S^n gebaut sind; nur enthalten sie nicht $(n-1)$mal die Koeffizienten $(a\alpha)$ von S^2, sondern diese nur $(n-i)$mal, die von T^2 aber $(i-1)$ mal. Demzufolge ist auch

$$S^n \equiv S^n_{n-1,0}, \quad T^n = T^n_{n-1,0} \quad \text{und} \quad S^n_{n-i,i-1} = T^n_{i-1,n-i}.$$

Ihre Bildung erfolgt nicht-symbolisch durch die Gleichung

$$S^n_{n-i,i-1} = \frac{1}{8}\,\frac{\partial S^{n-1}_{n-i,i-2}}{\partial \pi_{ik}}\,\frac{\partial T^2}{\partial \pi'_{ik}}. \qquad (i \gtreqless 2) \tag{37}$$

Zur Bildung dieser Ausdrücke kann man entweder von S^2 oder von T^2 ausgehen.

Wendet man dasselbe Verfahren zur Bestimmung der $A_n(L^2)$ an, so erhält man:

$$A_n(L^2) = A^{(n)}_{n,0} + \binom{n}{1}\lambda A^{(n)}_{n-1,1} + \binom{n}{2}\lambda^2 A^{(n)}_{n-2,2} + \dots + \lambda^n A^{(n)}_{0,n}. \tag{38}$$

Der Koeffizient von λ^n stimmt hier mit $A_n(T^2)$ überein. Das Bildungsgesetz der $A^{(n)}_{n-i,i}$ ist wieder gegeben durch:

$$A^{(n)}_{n-i,i} = \frac{1}{16}\sum_{ik}\sum_{rs}\frac{\partial^2 S^{(n)}_{n-i,i-1}}{\partial\pi_{ik}\,\partial\pi_{rs}}\cdot\frac{\partial^2 T^2}{\partial\pi'_{ik}\,\partial\pi'_{rs}}\,. \tag{39}$$

Man kann hier ebenso von $S^n(T^2)$ ausgehen, wie oben erwähnt.

5. Beispiele.

Wir behandeln zuerst einen quadratischen Komplex, der uns schon früher begegnete. Die Variablen bezeichnen wir mit π_{ik} und wollen sie weiter nicht definieren, da hier nur der formale Teil erledigt werden soll. Durch die π_{ik} kann ebensogut eine Gerade als ein $K^1(\pi)$ oder eine $Ke(\pi)$ gegeben sein.

1. Wir wählen die Gleichung einer $F_2 = a'^2_x$ in Linienkoordinaten und setzen

$$S^2 \equiv \pi_{a'}\pi_{b'}\varrho_{a'}\varrho_{b'}\,. \qquad (\pi_{ik} = \varrho_{ik}) \quad (a = b)$$

Dann ist $A_1 = 0$ und:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial S^2}{\partial\pi_{ik}} &= 2(a'b')_{ik}\,\pi_{a'}\pi_{b'}\\ \frac{\partial^2 S^2}{\partial\pi_{mn}} &= 2(a'b')_{mn}\,\pi_{a'}\pi_{b'}\end{aligned}\right\}(ik \# mn)\,,$$

somit

$$S^3 = \tfrac{1}{2}(a'b'c'd')\,\pi_{a'}\pi_{b'}\varrho_{c'}\varrho_{d'}\,,$$

$$S^3 = \tfrac{1}{24}(a'b'c'd')^2\cdot\pi^2_{\pi'}\,;$$

setzen wir $\frac{1}{24}(a'b'c'd')^2 = A =$ der Diskriminante der $\mathfrak{F}_2$, so ist also

$$S^3 = A\cdot\pi^2_{\pi'}\,, \tag{40}$$

und daraus folgt:

$$S^4 = \tfrac{1}{8}\Sigma\cdot 4A\,\pi_{ik}\cdot 2(a'b')_{ik}\,\pi_{a'}\pi_{b'}\,,$$

$$S^4 = A\cdot S^2\,; \tag{41}$$

aus dieser Gleichung folgt dann sofort $S^5 = A^2\pi^2_{\pi'}$, $S^6 = A^2 S^2$ oder allgemein

$$\left\{\begin{aligned}S^{2n+1} &= A^n\,\pi^2_{\pi'}\,,\\ S^{2n} &= A^{n-1}S^2\,.\end{aligned}\right. \tag{42}$$

Nehmen wir $\pi_{\pi'}^2 = 0$, also die π_{ik} als Koordinaten einer Geraden, so verschwinden alle ungeraden S^n identisch.

Hieraus ergeben sich leicht die A^n, da:

$$\frac{\partial^2 S^2}{\partial \pi_{ik} \partial \pi_{rs}} = 2(a'b')_{ik}(a'b')_{rs},$$

$$\frac{\partial^2 S^{2i+1}}{\partial \pi_{ik} \partial \pi_{rs}} = A^i 4(ik \,\#\, rs),$$

$$\frac{\partial^2 S^{2i}}{\partial \pi_{ik} \partial \pi_{rs}} = 2A^{i-1}(a'b')_{ik}(a'b')_{rs}.$$

Es ist somit bei ungeradem $n = 2i+1$

$$A_{2i+1} = \tfrac{1}{16}\Sigma\Sigma \cdot 8 A^i (ik \,\#\, rs)\,(a'b')_{ik}(a'b')_{rs}$$
$$= \tfrac{1}{2} A^i (a'b'a'b'),$$

(41)
$$\underline{A_{2i+1} = 0,}$$

und bei geradem $n = 2i$ wird analog

$$A_{2i} = \tfrac{1}{16}\Sigma\Sigma\, 4 A^{i-1}(a'b')_{ik}(a'b')_{rs}(c'd')_{mn}(c'd')_{\sigma\tau},$$

wobei $mn \,\#\, ik$ und $\sigma\tau \,\#\, rs$ ist, also

(42)
$$\underline{A_{2i} = \tfrac{1}{4} A^i.} \qquad (A_1 = 0)$$

Demzufolge wird:

$$D_1 = 0,$$
$$D_2 = \tfrac{1}{4} A,$$
$$D_3 = -\tfrac{1}{4} A^2,$$
$$D_4 = -\tfrac{21}{16} A^2,$$
$$D_5 = \tfrac{1}{4} A^3,$$
$$D_6 = -\tfrac{205}{16} A^3;$$

sämtliche Invarianten dieses Systems sind durch A ausdrückbar.

2. Wir behandeln den Fall, wo S^2 in lineare Faktoren zerfällt, welche, wenn π_{ik} Strahlenkoordinaten sind, Gerade darstellen.

$$S^2 = \pi_{v'}\pi^{\sigma'} \cdot \varrho_{\omega'}\varrho_{\tau'},$$

dann ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial S^2}{\partial \pi_{ik}} &= (v'\sigma')_{ik}\,\pi_{\omega'}\pi_{\tau'} + (\omega'\tau')_{ik}\,\pi_{v'}\pi_{\sigma'}\\ \frac{\partial S^2}{\partial \pi_{mn}} &= (v'\sigma')_{mn}\,\pi_{\omega'}\pi_{\tau'} + (\omega'\tau')_{mn}\,\pi_{v'}\pi_{\sigma'}\end{aligned}\right\}(mn \mathrel{\#} ik)\,.$$

Also wird

$$S^3 = \tfrac{1}{8}\left[(v'\sigma'\omega'\tau')\,\pi_{\omega'}\pi_{\tau'}\varrho_{v'}\varrho_{\sigma'} + (\omega'\tau' v'\sigma')\,\pi_{v'}\pi_{\sigma'}\varrho_{\omega'}\varrho_{\tau'}\right]$$
$$= \tfrac{1}{4}(v'\sigma'\omega'\tau')\,S^2\,,$$

$$S^3 = \frac{\Delta}{4}S^2\,,$$

wenn $\Delta = (v'\sigma'\omega'\tau')$. Daraus folgt dann

$$S^4 = \frac{\Delta}{4}S^3 = \left(\frac{\Delta}{4}\right)^2 S^2, \ldots$$

also schließlich

$$\underline{S^n = \left(\frac{\Delta}{4}\right)^{n-2} S^2\,.} \tag{43}$$

Ferner ist $\dfrac{\partial^2 S^2}{\partial \pi_{ik}\,\partial \pi_{rs}} = (v'\sigma')_{ik}(\omega'\tau')_{rs} + (\omega'\tau')_{ik}(v'\sigma')_{rs}$,
somit wird nach (30)

$$A_n = \frac{1}{16}\cdot\left(\frac{\Delta}{4}\right)^{n-2}\cdot 2\Delta^2\,,$$

$$\underline{A_n = 2\left(\frac{\Delta}{4}\right)^n.} \tag{44}$$

Demzufolge ergibt sich:

$$\left\{\begin{aligned} &D_1 = \frac{\Delta}{2}\,, && D_4 \equiv 0\,,\\ &D_2 = \frac{\Delta^2}{8}\,, && D_n \equiv 0\,. \qquad (n \geqq 3)\\ &D_3 \equiv 0\,, \end{aligned}\right. \tag{45}$$

Wir wenden diese Formeln nun für einen quadratischen Komplex an, welcher gewöhnlich der tetraedrale oder Reyesche Komplex genannt wird. Die Geraden desselben sind dadurch definiert, daß sie vier Ebenen v', σ', ω' und τ' nach vier Punkten mit konstantem Doppelverhältnis k schneiden.

Es sei $(xy) = p^2$ eine solche Gerade. Ihr Schnittpunkt mit v' sei $u'_x + \lambda_1 u'_y = 0$, also $\lambda_1 = -\frac{v'_x}{v'_y}$, analog erhält man λ_2, λ_3 und λ_4 für die Schnittpunkte mit σ', ω' und τ'. Führt man dann in $k = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$ diese Werte ein und nimmt $p^2 = \pi^2$ veränderlich, so ergibt sich als Gleichung des gesuchten Komplexes:

$$\underline{\pi_{v'} \pi_{\sigma'} \varrho_{\omega'} \varrho_{\tau'} - k\, \pi_{\omega'} \pi_{\sigma'} \varrho_{v'} \varrho_{\tau'} = 0\,.} \tag{46}$$

Wir müssen also zur Berechnung der S^n und A_n die Formeln (36) und (38) anwenden. Nun sind, wie man sich leicht überzeugt, hier die Formen $S^n_{n-i,\,i-1}$ und $A^{(n)}_{n-i,\,i}$ identisch Null. Wir können daher sofort hinschreiben, mit Rücksicht auf (43) und (44):

$$S^n = \left(\frac{\Delta}{4}\right)^{n-2} S^2 + (-k)^{n-1} \frac{(\omega' \sigma' v' \tau')^{n-2}}{4^{n-2}} R^2\,,$$

wo $R^2 = \pi_{\omega'} \pi_{\sigma'} \varrho_{v'} \varrho_{\tau'}$.

$$S^n = \left(\frac{\Delta}{4}\right)^{n-2} S^2 + (-1)^{n-1} \cdot k^{n-1} \cdot (-1)^{n-2} \cdot \left(\frac{\Delta}{4}\right)^{n-2} R^2\,,$$

$$\underline{S^n = \left(\frac{\Delta}{4}\right)^{n-2} (S^2 - k^{n-1} R^2)\,.} \qquad (n \geqq 2) \tag{47}$$

S^n ist also geometrisch mit dem ursprünglichen Komplex identisch, wenn k eine Wurzel der Gleichung

$$k^{n-1} - k = 0$$

ist, oder da wir $k \gtrless 0$ annehmen können:

$$\underline{k^{n-2} - 1 = 0\,.}$$

Ferner wird:

$$\underline{A_n = 2\left(\frac{\Delta}{4}\right)^n (1 + k^n)\,,} \tag{48}$$

und hieraus ergibt sich

$$(49)\quad \begin{cases} D_1 = \dfrac{\Delta}{2}(1+k)\,, & D_4 = \dfrac{3k^2}{32}\Delta^4\,, \\[2ex] D_2 = \dfrac{\Delta^2}{8}(k^2+4k+1)\,, & D_5 = 0\,, \\[2ex] D_3 = \frac{3}{16}\Delta^3 k(k+1)\,, & D_6 = 0\,. \end{cases}$$

Beim Reyeschen Komplex sind also D_5 und D_6 gleich Null.

3. Schließlich wollen wir noch A_n und S^n für die Komplexe: $K \equiv S^2 + \lambda S^{20} = 0$ berechnen. Man erhält nach (36) und (37):

$$(50)\quad \underline{S^n(K) = S^n + \binom{n-1}{1}\lambda S^{n-1} + \binom{n-1}{2}\lambda^2 S^{n-2} + \ldots + \lambda^{n-1}\pi^2_{\pi'}}$$

und ebenso nach (38) und (39):

$$(51)\quad \begin{cases} \underline{A_n(K) = A_n + \binom{n}{1}\lambda A_{n-1} + \binom{n}{2}\lambda^2 A_{n-2} + \cdots} \\ \qquad\qquad \underline{+ \binom{n}{n-1} A_1 \lambda^{n-1} + \lambda^n \cdot 6\,.} \end{cases}$$

Demzufolge wird:

$$(52)\quad \begin{cases} D_1(K) = A_1 + 6\lambda\,, \\ D_2(K) = D_2 + 2\lambda\cdot 5 D_1 + 6\lambda^2\cdot 5\,, \\ D_3(K) = D_3 + 3\lambda\cdot 4 D_2 + 3\lambda^2\cdot 4\cdot 5\cdot D_1 + 6\lambda^3\cdot 4\cdot 5\,, \\ D_4(K) = D_4 + 4\lambda\cdot 3 D_3 + 6\lambda^2\cdot 3\cdot 4\cdot D_2 + 4\lambda^3\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot D_1 \\ \qquad\qquad + \lambda^4\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,, \\ D_5(K) = D_5 + 5\lambda\cdot 2 D_4 + 10\lambda^2\cdot 2\cdot 3\cdot D_3 \\ \qquad\qquad + 10\lambda^3\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot D_2 + 5\lambda^4\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot D_1 \\ \qquad\qquad + \lambda^5\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,, \\ D_6(K) = D_6 + 6\lambda\cdot 1 D_5 + 15\lambda^2\cdot 1\cdot 2\cdot D_4 \\ \qquad\qquad + 20\lambda^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot D_3 + 15\lambda^4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot D_2 \\ \qquad\qquad + 6\lambda^5\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 + \lambda^6\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,. \end{cases}$$

Insbesondere kann die letzte Gleichung noch in folgenden Formen geschrieben werden:

$$(53)\quad \left\{ \begin{aligned} &\underline{D_6(K) = D_6 + \binom{6}{1}\lambda\, 1!\, D_5 + \binom{6}{2}\lambda^2\, 2!\, D_4 + \binom{6}{3}\lambda^3\, 3!\, D_3} \\ &\qquad\qquad \underline{+ \binom{6}{4}\lambda^4\, 4!\, D_2 + \binom{6}{5}\lambda^5\, 5!\, D_1 + \lambda^6\, 6!} \end{aligned} \right.$$

oder

$$D_6(K) = \sum_{0,6}^{i} \binom{6}{6-i} \lambda^i D_{6-i}\,. \qquad (D_0 = 6!)$$

Nennen wir ein Komplexsystem, dessen Determinante vom Range 5 ist, ein konisches, so folgt, daß es in einem Büschel von Systemen sechs solche konische Systeme gibt, vorausgesetzt, daß die Diskriminante der Form 6. Ordnung von λ (53) nicht verschwindet.

6. Das Kleinsche System.

Sind $S^2 = 0$ und $T^2 = 0$ zwei Komplexsysteme 2. Ordnung, so gibt es im Büschel $L_2 \equiv S^2 + \lambda T^2 = 0$ sechs konische Komplexsysteme 2. Ordnung. Es sei L_2' ein solches; dieses enthält dann einen Komplex als „singuläres Gebilde", gerade so, wie ein Kegel 2. Ordnung seine Spitze als singulären Punkt enthält. Wir wollen diesen K^1, um die Analogie festzuhalten, „Spitzenkomplex" von L_2' nennen. Die Polar-*Ke* irgend eines K^1 bezüglich L_2' geht durch den Spitzenkomplex, dessen Polar-*Ke* selbst völlig unbestimmt ist. Aus letzterer Tatsache ergeben sich dann die sechs Gleichungen $a_{ik}\alpha_{p'}^2 = 0$, aus denen man die Koordinaten p_{ik} des Spitzenkomplexes leicht bestimmen kann. Die Gleichung von L_2' in Komplexebenenkoordinaten wird demgemäß ein vollständiges Quadrat, das Quadrat des Spitzenkomplexes von L_2'.

Wir erhalten also mit den sechs konischen Systemen auch sechs Spitzenkomplexe Ω_i. Auf diese 6 Ω_i wird man auch durch die Frage geführt, welche K^1 bezüglich $S^2 = 0$ und $T^2 = 0$ dieselbe *Ke* als Polar-*Ke* besitzen. Ferner beweist man leicht, daß je zwei der sechs Spitzenkomplexe (Ω_i und Ω_k) sowohl bezüglich S^2 als auch bezüglich T^2 konjugiert sind, d. h. die Polar-*Ke* von Ω_i geht durch Ω_k und umgekehrt. Daraus folgt, daß die *Ke*, die man durch fünf von den Ω_i legen kann, mit der Polar-*Ke* des 6. Spitzenkomplexes zusammenfällt. (Bezüglich des Beweises, daß Ω_i und Ω_k konjugiert sind, vgl. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen, Bd. II, S. 208.) Transformiert man dann die Komplexkoordinaten π_{ik} auf die Koordinaten der Spitzenkomplexe, führt also diese als Fundamentalkomplexe ein, so enthalten die neuen Formen S^2 und T^2 nur die Quadrate der Variablen.

Wir ersetzen nun in diesen Betrachtungen $T^2 = 0$ durch das identische System $S^{20} = 0$. Dann gibt uns Gleichung (53) die sechs konischen Komplexsysteme $L_i \equiv S^2 + \lambda_i S^{20} = 0$. Wir setzen in folgendem voraus, daß die Diskriminante D von (53) nicht verschwindet. Die sechs Spitzenkomplexe der L_i sind dann bezüglich des S^{20} konjugiert, sie liegen also gegenseitig in Involution oder bilden ein Kleinsches System. Da jedes System $S^2 + \lambda S^{20} = 0$ den zu $S^2 = 0$ gehörigen quadratischen Strahlenkomplex enthält, so können wir sagen:

„Durch jeden quadratischen Linienkomplex gehen im allgemeinen sechs konische Komplexsysteme 2. Ordnung, deren Spitzenkomplexe ein Kleinsches System bilden.“

Jedem quadratischen Linienkomplex ist also so ein einziges Kleinsches System zugeordnet. Wir wählen dieses als Fundamentalsystem; dann enthalten die transformierten S^2 und S^{20} nur die Quadrate der Variablen. Es sei also jetzt

$$S^2 \equiv \sum_{ik} \lambda_{ik} \pi_{ik}^2 = 0, \tag{54}$$

$$S^{20} \equiv \sum_{ik} \mu_{ik} \pi_{ik}^2 = 0. \tag{55}$$

Demzufolge wird die Bedingung, daß ein $K^1_{(\pi)}$ speziell sei, nicht mehr $\pi^2_{\pi'} = 0$, sondern $\sum_{ik} \mu_{ik} \pi_{ik}^2 = 0$; es existiert also nicht mehr das komplementäre Gegenüberstehen von π_{ik} und π_{nm} $(ik \# mn)$. Wir könnten daher sehr gut jetzt in (54) und (55) die sechs Variablen p_i einführen. Im Anschluß an das Frühere jedoch bleiben wir bei der Bezeichnung mit zwei Indizes.

Wir bilden nun die kovarianten Systeme zu S^2 und S^{20} der Gleichungen (54) und (55). Es ist $\pi'_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial \pi^2_{\pi'}}{\partial \pi_{ik}}$, somit wird, da $\pi^2_{\pi'}$ in die Form $\sum_{ik} \mu_{ik}\pi^2_{ik}$ transformiert erscheint, statt π'_{ik} zu setzen sein $\mu_{ik}\pi_{ik}$, also wird $\frac{\partial S^n}{\partial \pi'_{ik}}$ zu ersetzen sein durch $\frac{1}{\mu_{ik}}\frac{\partial S^n}{\partial \pi_{ik}}$. Somit werden die Formeln (29) und (30) zu:

$$S^n = \frac{1}{4}\sum_{ik}\frac{1}{\mu_{ik}}\frac{\partial S^{n-1}}{\partial \pi_{ik}} \cdot \frac{\partial S^2}{\partial \pi_{ik}} \tag{56}$$

und

$$A^n = \frac{1}{4}\sum_{ik}\sum_{rs}\frac{1}{\mu_{ik}}(ik=rs)\frac{\partial^2 S^n}{\partial \pi_{ik}\,\partial \pi_{rs}}(ik=rs)\cdot\frac{\partial S^2}{\partial \pi_{ik}\,\partial \pi_{rs}}(ik=rs)$$

oder

$$A^n = \frac{1}{2}\sum_{ik}\sum_{rs}\frac{1}{\mu_{ik}}(ik=rs)\frac{\partial^2 S^n}{\partial \pi_{ik}\,\partial \pi_{rs}}\cdot(ik=rs)\,\lambda_{ik},$$

$$A^n = \frac{1}{2}\sum_{ik}\frac{\lambda_{ik}}{\mu_{ik}}\frac{\partial^2 S^n}{\partial \pi_{ik}\,\partial \pi_{ik}}. \tag{57}$$

In diesen Formeln ist schon berücksichtigt, daß in dem S^2, welches durch (54) gegeben ist, nur der Zahlenfaktor 2 beim Differenzieren auftritt und nicht wie bei der Form $\pi^2_{\alpha'}\pi^2_{\alpha'}$ der Faktor 4.

Aus (56) ergibt sich, da nach (54) $\frac{\partial S^2}{\partial \pi_{ik}} = 2\lambda_{ik}\pi_{ik}$

$$S^n = \frac{1}{2}\sum_{ik}\frac{\lambda_{ik}}{\mu_{ik}}\frac{\partial S^{n-1}}{\partial \pi_{ik}}\pi_{ik},$$

also sukzessive

$$S^3 = \frac{1}{2}\sum_{ik}\frac{\lambda_{ik}}{\mu_{ik}}2\lambda_{ik}\pi^2_{ik},$$

$$= \sum\frac{\lambda^2_{ik}}{\mu_{ik}}\pi^2_{ik},$$

$$S^4 = \sum\frac{\lambda^3_{ik}}{\mu^2_{ik}}\pi^2_{ik},$$

und daraus folgt allgemein:

$$S^n = \sum \frac{\lambda_{ik}^{n-1}}{\mu_{ik}^{n-2}} \pi_{ik}^2 . \tag{58}$$

Jedem dieser kovarianten Komplexsysteme ist also dasselbe Kleinsche System zugeordnet. Für $\lambda = \mu$ folgt aus (58):

$$S^n(S^{20}) = S^{20} = \Sigma \mu_{ik} \pi_{ik}^2 , \tag{59}$$

was mit früherem übereinstimmt, da die S^n für das identische System mit ihm zusammenfallen.

Aus (58) folgt: $\frac{\partial^2 S^n}{\partial \pi_{ik} \partial \pi_{ik}} = 2 \frac{\lambda_{ik}^{n-1}}{\mu_{ik}^{n-2}}$, somit wird nach (57):

$$A_n = \sum \frac{\lambda_{ik}^n}{\mu_{ik}^{n-1}} . \tag{60}$$

Wir können in (55) die μ_{ik} gleich der Einheit setzen; dann sind die λ_{ik} die sechs Wurzeln aus $D_6(K) = 0$. Die Gleichungen (54) und (55) werden dann zu:

$$\sum_{ik} \lambda_{ik} \pi_{ik}^2 = 0$$

und

$$\sum_{ik} \pi_{ik}^2 = 0 . \tag{61}$$

Vorausgesetzt ist hierbei, daß $D_6(K) = 0$ keine gleichen Wurzeln hat, daß also die Diskriminante dieser Gleichung von Null verschieden ist.

7. Die reziproken Systeme.

Es sei $S_{\pi\pi}^2 = 0$ die Gleichung eines Komplexsystems 2. Ordnung. Ist τ_{ik} eine *Ke*, so hat ihr Polkomplex bezüglich des identischen Systems $\pi_{\pi'}^2 = 0$ dieselben Koordinaten. Er liegt auf $S_{\pi\pi}^2 = 0$, wenn $S_{\tau\tau}^2 = 0$ ist. Denkt man sich zu jedem K^1 auf $S_{\pi\pi}^2 = 0$ die Polar-*Ke* bezüglich eines anderen S^2 konstruiert, so umhüllen diese Polar-*Ke* ein Komplexsystem 2. Klasse, welches zu $S_{\pi\pi}^2 = 0$ bezüglich S^2 reziprok genannt werden kann, wobei sich diese Verwandtschaft nur auf den Komplexraum bezieht. Aus obigem ergibt sich also der Satz:

„Vertauscht man in $S^2_{\pi\pi} = 0$ die π_{ik} mit den τ_{ik}, so stellt $S^2_{\tau\tau} = 0$ das zu $S^2_{\pi\pi}$ bezüglich S^{20} reziproke System dar.“

Es seien $S^2 \equiv \pi^2_{\alpha'} \pi^2_{\alpha'} = 0$ und $T^2 \equiv \pi^2_{m'} \pi^2_{\mu'} = 0$ gegeben. Das zu T^2 bezüglich S^{20} reziproke System ist $T^2_{\tau\tau} \equiv \tau^2_{m'} \tau^2_{\mu'} = 0$. Ist $K^1_{(p)}$ ein K^1, so hat seine Polar-*Ke* bezüglich S^2 die Koordinaten $a'_{ik} p^2_{\alpha'}$. Sie gehört also $T^2_{\tau\tau}$ an, wenn

$$p^2_{\alpha'} m^2_{\alpha'} p^2_{b'} \mu^2_{\beta'} = 0$$

ist. Lassen wir hier p veränderlich, so ist

$$\underline{M^2 \equiv \pi^2_{a'} \pi^2_{b'} m^2_{\alpha'} \mu^2_{\beta'} = 0} \tag{62}$$

die Gleichung des zu $T^2_{\tau\tau}$ bezüglich S^2 reziproken Systems. Nehmen wir hier statt $T^2_{\tau\tau}$ das nach (27) gebildete $\Sigma^2(T^2)$, so erhalten wir das zu $T^2_{\tau\tau}$ bezüglich $S^2_{\pi\pi}$ reziproke System.

(62) erhält man in nicht symbolischer Form:

$$\underline{M^2 \equiv \frac{1}{32} \sum_{ik} \sum_{rs} \frac{\partial S^2}{\partial \pi_{ik}} \cdot \frac{\partial S^2}{\partial \pi_{rs}} \cdot \frac{\partial^2 T^2}{\partial \pi_{ik}\, \partial \pi_{rs}} = 0\,.} \tag{63}$$

Nehmen wir hier für T^2 das S^{20}, so wird M_2 mit S^3 identisch, wodurch dessen geometrische Bedeutung erhellt. S^3 ist also das zu S^{20} bezüglich S^2 reziproke System. Es stimmt dies mit der Forderung überein, daß die Polar-*Ke* eines $K^1_{(p)}$ bezüglich S^2 speziell ist; diese Bedingung ist nämlich auch $S^3_{pp} = 0$.

Setzen wir in (62) statt $T^2_{\tau\tau} \ldots S^2_{\tau\tau}$, so wird M^2 mit S^4 identisch. Wir konstruieren also zuerst das zu $S^2_{\pi\pi}$ bezüglich S^{20} reziproke System $S^2_{\tau\tau}$ und dann zu diesem das bezüglich $S^2_{\pi\pi}$ reziproke System. Dies ist die geometrische Bedeutung von S^4. Ähnlich lassen sich zu allen $S^n_{\pi\pi}$ und $S^n_{\tau\tau}$ solche Konstruktionen finden; da aber bereits S^7 als Aggregat der niederen S^i mit Einschluß von $S^1 \equiv S^{20}$ darstellbar ist, so führen diese beliebig fortzusetzenden reziproken Konstruktionen zu keinen neuen Systemen.

Es sei durch $K^1_{(p)}$ und $K^1_{(q)}$ ein Komplexbüschel bestimmt. Dieses Büschel schneidet $S^2 \equiv \pi^2_{\alpha'} \pi^2_{\alpha'} = 0$ und $S^{20} \equiv \pi^2_{\pi'} = 0$ in je zwei Komplexen $\varkappa_1 \tau^2_{p'} + \varkappa_2 \tau^2_{q'} = 0$, wo

$$\varkappa_1^2 p^2_{p'} + 2\varkappa_1 \varkappa_2 p^2_{q'} + \varkappa_2^2 q^2_{q'} = 0\,,$$

bzw.

$$\varkappa_1^2 p_{\alpha'}^2 p_{\alpha'}^2 + 2\varkappa_1 \varkappa_2 p_{\alpha'}^2 q_{\alpha'}^2 + \varkappa_2^2 q_{\alpha'}^2 q_{\alpha'}^2 = 0$$

ist.

Dies sind in bezug auf $\varkappa$ zwei binäre quadratische Formen. Ihre Invarianten sind:

$$D_{11} = p_{p'}^2 q_{q'}^2 - (p_{q'}^2)^2$$

und

$$D_{22} = p_{\alpha'}^2 p_{\alpha'}^2 q_{b'}^2 q_{\beta'}^2 - p_{\alpha'}^2 q_{\alpha'}^2 p_{b'}^2 q_{\beta'}^2$$

oder, wenn wir die Koordinaten $(m\mu) = (n\nu)$ des Büschels $(p\,q)$ einführen, wird

$$D_{11} = m_{n'}^2 \mu_{\nu'}^2 ,$$

$$D_{22} = m_{\alpha'}^2 \mu_{\beta'}^2 n_{\alpha'}^2 \nu_{b'}^2 .$$

Gleich Null gesetzt, geben sie bei veränderlichem $(m\,\mu)$ die Gleichung von S^{20} bzw. S^2 in Büschelkoordinaten. Obige zwei Formen haben aber auch eine simultane Invariante $D_{12} = p_{p'}^2 \cdot q_{\alpha'}^2 q_{\alpha'}^2 + q_{q'}^2 p_{\alpha'}^2 p_{\alpha'}^2 - 2\, p_{q'}^2 p_{\alpha'}^2 q_{\alpha'}^2$. Führt man hier die Büschelkoordinaten ein, so wird

(64) $$\underline{D_{12} = m_{\alpha'}^2 n_{\alpha'}^2 \mu_{\nu'}^2 .}$$

Ist $D_{12} = 0$, so liegen die vier Schnittkomplexe des Büschels mit S^2 und S^{20} harmonisch. Nun sind aber die zwei Schnittkomplexe des Büschels mit S^{20} die Leitlinien des Büschels, und zwei K^1 desselben, welche zu den Leitlinien harmonisch liegen, sind in Evolution. Folglich stellt für veränderliche Büschelkoordinaten $D_{12} = 0$ einen quadratischen Büschelkomplex (∞^8 viele Büschel) dar, dessen Büschel $S^2 = 0$ nach zwei involutorisch liegenden Komplexen schneidet.

Von den vier Schnittkomplexen eines Büschels mit S^2 und S^{20} fallen zwei zusammen, die je einem der beiden Paare angehören, wenn:

(65) $$\underline{D_{11} D_{22} - D_{12}^2 = 0}$$

ist. Dies heißt aber, daß das Büschel S^2 nach zwei K^1 schneidet, von denen einer speziell ist. Somit ist (65) die Gleichung des in S^2 enthaltenen quadratischen Strahlenkomplexes in Büschelkoordinaten. (Vgl. oben die Gleichung der Schnittkurve 2. Ordnung in Linienkoordinaten.)

8. Komplexflächen und Komplexkurven.

Wir behandeln noch auszugsweise den allgemeinen, quadratischen Linienkomplex.

Es seien also jetzt π_{ik} Koordinaten von Geraden; dann schreiben wir statt $S^2_{\pi\pi} \ldots K^2_{\pi\pi} \equiv \pi^2_{a'} \pi^2_{\alpha'} = 0$.

Alle Gerade, die durch einen Punkt y gehen, bilden den „Komplexkegel“ von y. Seine Gleichung wird, wenn wir $(x\,y)_{ik} = \pi_{ik}$ in $K^2_{\pi\pi} = 0$ einsetzen,

$$\underline{K_y \equiv x_{a'} x_{\alpha'} y_{a'} y_{\alpha'} = 0\,.} \tag{66}$$

Die Beziehung zwischen den Punkten x und y ist wechselseitig, d. h. geht K_y durch x, so geht K_x durch y.

Dual umhüllen alle Gerade des K^2 in einer Ebene v' einen Kegelschnitt, den „Komplexkegelschnitt $K_{v'}$“. Seine Gleichung wird dual zu (66):

$$\underline{K_{v'} \equiv u'_a u'_\alpha v'_a v'_\alpha = 0\,.} \tag{67}$$

Auch hier ist die Beziehung zwischen u' und v' wechselseitig. Ferner ist leicht nachzuweisen, daß, wenn y auf $K_{v'}$ liegt, K_y von v' berührt wird, worauf wir hier nicht näher eingehen.

Nehmen wir in v' ein Dreieck $x\,y\,z$ mit den Seiten $(x\,y) = r^2$, $(y\,z) = p^2$ und $(z\,x) = q^2$ an. Dann kann statt (67) geschrieben werden

$$(a\,x\,y\,z)\,a_{u'}\,(\alpha\,x\,y\,z)\,\alpha_{u'} = 0\,.$$

Entwickeln wir hier $(a\,x\,y\,z)\,a_{u'}$ und $(\alpha\,x\,y\,z)\,\alpha_{u'}$ und führen die Koordinaten p^2, q^2, r^2 ein, so wird auch:

$$\underline{K_{v'} = (p^2_{a'} u'_x + q^2_{a'} u'_y + r^2_{a'} u'_z)\,(p^2_{\alpha'} u'_x + q^2_{\alpha'} u'_y + r^2_{\alpha'} u'_z) = 0\,.} \tag{68}$$

Hier können wir statt u'_x, u'_y und u'_z ternäre Linienkoordinaten u_i setzen und erhalten nach dem Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} K_{v'} = K^2_{pp} u_1^2 + K^2_{qq} u_2^2 + K^2_{rr} u_3^2 + 2\,K^2_{pq} u_1 u_2 \\ + 2\,K^2_{qr} u_2 u_3 + 2\,K^2_{rp} u_3 u_1 = 0\,. \end{aligned}$$

Aus (68) ergibt sich leicht die Diskriminante $D_{v'}$ von $K_{v'}$:

$$D_{v'} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} p_{a'}^2 & p_{b'}^2 & p_{c'}^2 \\ q_{a'}^2 & q_{b'}^2 & q_{c'}^2 \\ r_{a'}^2 & r_{b'}^2 & r_{c'}^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} p_{\alpha'}^2 & p_{\beta'}^2 & p_{\gamma'}^2 \\ q_{\alpha'}^2 & q_{\beta'}^2 & q_{\gamma'}^2 \\ r_{\alpha'}^2 & r_{\beta'}^2 & r_{\gamma'}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_{pp}^2 & K_{pq}^2 & K_{pr}^2 \\ K_{qp}^2 & K_{qq}^2 & K_{qr}^2 \\ K_{rp}^2 & K_{rq}^2 & K_{rr}^2 \end{vmatrix}.$$

Die einzelnen Determinanten dieser Gleichung sind aber nach (85), Abschnitt I, umzuformen, so daß wird:

$$D_{v'} = \frac{8^2}{6} a_{v'} b_{v'} a_{c'} b_{c'} \alpha_{v'} \beta_{v'} \alpha_{\gamma'} \beta_{\gamma'} .$$

$K_{v'}$ zerfällt in ein Punktepaar, wenn $D_{v'} = 0$ ist; dies gibt für die $v' = u'$ die Bedingung:

(69) $$\underline{F_{u'} \equiv a_{u'} b_{u'} \alpha_{u'} \beta_{u'} a_{c'} b_{c'} \alpha_{\gamma'} \beta_{\gamma'} = 0 .}$$

Dies ist eine Fläche 4. Klasse, die „Singularitätenfläche“ des K^2. Dual erhält man als Ort der Punkte y, deren K_y in ein Ebenenpaar zerfällt,

(70) $$\underline{F_x \equiv a'_x b'_x \alpha'_x \beta'_x a'_c b'_c \alpha'_\gamma \beta'_\gamma = 0 ,}$$

eine Fläche 4. Ordnung, welche mit der eben genannten identisch ist, nach dem bei Komplexsystemen Gesagten.

Die Singularitätenfläche hat im allgemeinsten Falle 16 Doppelpunkte und Doppelebenen, worauf wir später zurückkommen.

Es sei ein Punkt y gegeben. Dann wird die Gleichung von K_y in Linienkoordinaten p:

(71) $$\underline{F_{p^2} \equiv a'_y b'_y \alpha'_y \beta'_y a'_p \alpha'_q b'_p \beta'_q = 0 .}$$

Nimmt man hier $p^2 = q^2$ konstant und y veränderlich, so ist $F_{p^2} = 0$ eine Fläche 4. Ordnung, die so p^2 zugeordnet ist. Der Komplexkegel jedes Punktes von F_{p^2} berührt p^2. F_{p^2} ist also der Ort jener Punkte, deren Komplexkegel p^2 berühren. Zugleich wird F_{p^2} von den Komplexkegeln der Punkte auf p^2 eingehüllt.

Ist v' eine Ebene, so wird die Gleichung von $K_{v'}$ in Linienkoordinaten

(72) $$\underline{a_{v'} b_{v'} \alpha_{v'} \beta_{v'} a_{p'} \alpha_{q'} b_{p'} \beta_{q'} = 0 .}$$

Für konstante $p^2 = q^2$ ist dies eine Fläche 4. Klasse, welche mit F_{p^2} identisch ist, da die Gleichungen (71) und (72) *dual zueinander sind*. Wir nennen F_{p^2} die „Komplexfläche von p^2". Sie enthält p^2 als Doppellinie. Ihre acht Doppelpunkte und Doppelebenen bilden eine zu sich selbst duale Konfiguration, die Plückersche Konfiguration (Plücker, Geometrie des Raumes).

Die acht Doppelpunkte erhält man als Schnittpunkte von drei Kegeln K_x, K_y und K_z, wenn x, y, z auf p^2 liegen. Dual die acht Doppelebenen.

Es sei v' eine Ebene durch p^2. Der Pol von v' bezüglich $K_{v'}$ ist identisch mit dem Pol von w' durch p^2, hat also die Gleichung $P_{w'} \equiv a_{u'} \alpha_{w'} a_{v'} \alpha_{v'} = 0$. Ebenso wird der Pol von v' bezüglich $K_{w'}$: $P_{v'} \equiv a_{u'} \alpha_{v'} a_{w'} \alpha_{w'} = 0$. Dreht sich w' um p^2, so beschreibt ihr Pol bezüglich $K_{v'}$ eine Gerade, nämlich die Linie $P_{w'} P_{v'}$, welche die zu p^2 konjugierte Linie heißt. Ihre Gleichung ergibt sich aus $P_{w'}$ und $P_{v'}$, wenn man $(w'v') = p^2$ berücksichtigt, in der Form: $\pi'_a \pi'_b p'_a p'_b p'^2_\alpha p'^2_\beta = 0$; dies gibt umgeformt

$$G_{p^2} \equiv \pi^2_{p'} K^3_{pp} - 2\, K^2_{\pi p} K^2_{pp} = 0\,. \tag{73}$$

Ist p^2 dem K^2 angehörig, so fällt also G_{p^2} mit p^2 zusammen. Ist $K^3_{pp} = 0$, so wird der Polarkomplex $K^2_{\pi p}$ von p^2 speziell, seine Achse ist die konjugierte Gerade.

Ist endlich p^2 ein „singulärer" Strahl, d. h. $K^2_{pp} = 0$ und $K^3_{pp} = 0$, so verschwindet G_{p^2} identisch. Die Beziehung zwischen p^2 und G_{p^2} ist nicht umkehrbar.

Ist p^2 eine Gerade des K^2 und v' eine Ebene durch p^2, so berührt $K_{v'}$ p^2 (Fig. 1); da $K^2_{pp} = 0$ ist, wird

$$K_{v'} \equiv K^2_{qq} u'^2_y + K^2_{rr} u'^2_z + 2\, K^2_{pq} u'_x u'_y + 2\, K^2_{qr} u'_y u'_z + 2\, K^2_{rp} u'_z u'_x = 0\,.$$

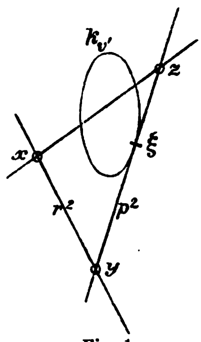

Fig. 1.

Der Berührungspunkt ξ von p^2 und $K_{v'}$ ist der Pol von p^2 bezüglich $K_{v'}$; seine Gleichung wird also

$$P_\xi \equiv u'_y K^2_{pq} + u'_z K^2_{rp} = 0\,.$$

Hier sind q^2 und r^2 beliebig in v' gewählt. Nehmen wir nun $K^2_{pq} = 0$, d. h. q^2 dem Komplexe $K^2_{\pi p} = 0$ angehörig an. Dann ist $K^2_{rp} \gtrless 0$, da sonst p^2, q^2 und r^2 durch denselben Punkt S gehen würden, es läge also kein eigentliches Koordinatendreieck vor. S ist nämlich der zu v' im Komplexe $K^2_{\pi p}$ konjugierte Punkt. Ist aber $K^2_{pq} = 0$, so wird die Gleichung des Berührungspunktes ξ:

$$u'_z \cdot K^2_{rp} = 0\,,$$

ξ fällt also mit z zusammen (Fig. 2).

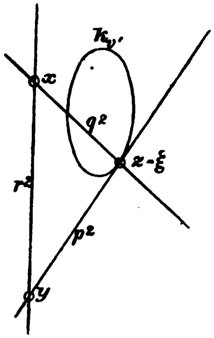

Fig. 2.

Der Berührungspunkt von $K_{v'}$ und p^2 ist also der zu v' bezüglich $K^2_{\pi p} = 0$ konjugierte Punkt.

Ein singulärer Strahl ist ein solcher, welcher den Komplexen K^2_{pp} und K^3_{pp} angehört. Es gibt in jeder Ebene vier solche singuläre Strahlen; sie sind die gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte $K_{v'}$ und $K^3_{v'}$, wo $K^3_{v'}$ der Komplexkegelschnitt von v' bezüglich $K^3_{\pi\pi} = 0$ ist. Dual gehen durch jeden Punkt vier singuläre Strahlen.

Ist p^2 ein singulärer Strahl, so wird $K^2_{\pi p} = 0$ speziell. Die Gleichung der Achse ist dann $K^2_{\pi p} = 0$, und diese schneidet p^2 zufolge $K^2_{pp} = 0$ in einem Punkte P_s.

p^2 und die Achse q^2 von $K^2_{\pi p} = 0$ liegen in einer Ebene E_s, der singulären Ebene von p^2. Sie wird von allen K_y (y auf p^2) längs p^2 berührt. Ebenso heißt P_s der singuläre Punkt auf p^2. In ihm wird p^2 von allen $K_{v'}$ (v' durch p^2) berührt. Wir wählen nun in $v' = (p^2 q^2)$ das Koordinatendreieck p^2, q^2, r^2; dann schneidet r^2, welches beliebig in v' liegt, q^2, somit ist $K^2_{qr} = 0$, $K^2_{pr} \gtrless 0$. Es wird dann $K^2_{pp} = 0$, $K^2_{qq} = K^4_{pp}$, $K^2_{pr} = 0$, $K^2_{qr} = K^3_{pr}$, $K^2_{pq} = 0$. Somit ist

$$K_{v'} \equiv K^4_{pp}\, u'^2_y + K^2_{rr}\, u'^2_z + 2K^3_{pr}\, u'_y u'_z = 0\,.$$

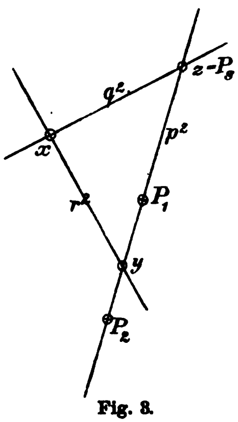

Fig. 3.

Es zerfällt also $K_{v'}$ in ein auf p^2 gelegenes Punktepaar. (Fig. 3.) Dual zerfällt K_z in ein durch p^2 gehendes Ebenenpaar.

Der Ebene v' entspricht bezüglich des $K^3_{\pi p} = 0$ ein Punkt P. Dieser liegt auf p^2, da p^2 in v' wegen $K^3_{pp} = 0$

dem $K^3_{\pi p} = 0$ angehört. Wir nennen ihn den Punkt P der Ebene v'; er ist mit P_s nur dann identisch, wenn auch q^2, das ja in v' durch P_s geht, dem $K^3_{\pi p} = 0$ angehört. Da nun $q^2 = K^2_{\pi p} = 0$ ist, so müßte $K^4_{pp} = 0$ sein, was wir vorläufig nicht voraussetzen. P_s ist ein Punkt der Singularitätenfläche, E_s die zugehörige Tangentialebene, p^2 ist Tangente an F_x, P_1 und P_2, welche zusammen $K_{v'}$ bilden, sind die zwei weiteren Schnittpunkte von p^2 mit F_x. Der Funkt P von v' liegt auch auf p^2, und zwar mit P_s nicht zusammenfallend. Wir können nun r^2 durch P_s wählen, so daß also r^2 dem $K^3_{\pi p} = 0$ angehört, oder $K^3_{pr} = 0$ ist. Dann wird aber

$$K_{v'} \equiv K^4_{pp} u_y'^2 + K^2_{rr} u_z'^2 = 0,$$

d. h. P liegt zu P_s bezüglich P_1 und P_2 harmonisch.

Sind $K^2_{\pi\sigma} = 0$, $K^3_{\pi\sigma} = 0$, ... die Polarkomplexe einer Geraden σ, so erhält man den zur Ebene $v' = (xyz)$ bezüglich $K^n_{\pi\sigma} = 0$ konjugierten Punkt in der Form:

$$K^n_{p\sigma} u_x' + K^n_{q\sigma} u_y' + K^n_{r\sigma} u_z' = 0. \tag{74}$$

Hierbei sind p^2, q^2 und r^2 wieder die Seiten des Dreiecks xyz. Nehmen wir $\sigma^2 = p^2$, so wird aus (74)

$$K^n_{pp} u_x' + K^n_{pq} u_y' + K^n_{pr} u_z' = 0.$$

Setzen wir hier nun

$$n = 2, \quad K^2_{pp} = 0, \quad K^2_{pq} = 0,$$

so wird $K^2_{pr} \cdot u_z' = 0$, was mit obigem übereinstimmt, da P_s mit z zusammenfällt. Für $n = 3$ folgt dann:

$$K^3_{pp} u_x' + K^3_{pq} u_y' + K^3_{pr} u_z' = 0$$

oder

$$K^3_{pp} u_x' + K^4_{pp} u_y' + K^3_{pr} u_z' = 0,$$

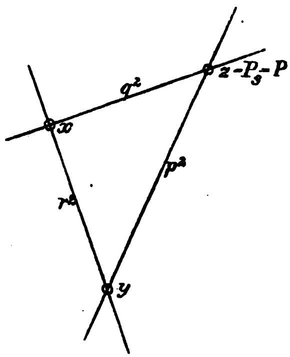

Fig. 4.

somit wird $P \equiv K^4_{pp} u_y' + K^3_{pr} u_z' = 0$, was auch mit obigem übereinstimmt.

Wenn nun auch $K^4_{pp} = 0$ ist, so fällt P_s mit P in z zusammen (Fig. 4). $K_{v'}$ wird dann:

$$K_{v'} \equiv u_z'(K^2_{rr} u_z' + 2 K^3_{pr} u_y') = 0,$$

d. h. ein Punkt des Paares, in welches $K_{v'}$ zerfällt, fällt mit z zusammen. In z sind also jetzt drei Punkte von F_x vereinigt. Der vierte Schnittpunkt von p^2 mit F_x ist dann gegeben durch $K^2_{rr} u'_z + 2 K^3_{pr} u'_y = 0$. Die Geraden, welche den Komplexen $K^2_{\pi\pi} = 0$, $K^3_{\pi\pi} = 0$ und $K^4_{\pi\pi} = 0$ angehören, sind somit Inflexionstangenten der Singularitätenfläche.

Nehmen wir nun auch an, daß $K^3_{\pi p}$ speziell ist, daß also p^2 auch dem Komplex $K^5_{\pi\pi} = 0$ angehört. Es gibt dann nur eine endliche Zahl von solchen Geraden p^2. Sind die Gleichungen auf das zugehörige Kleinsche System transformiert, so bestehen zwischen den sechs Koordinaten p_i von p^2 die Gleichungen:

$$\Sigma p_i^2 = 0, \quad \Sigma \lambda_i p_i^2 = 0, \quad \Sigma \lambda_i^2 p_i^2 = 0, \quad \Sigma \lambda_i^3 p_i^2 = 0$$

und

$$\Sigma \lambda_i^4 p_i^2 = 0.$$

Hieraus wird z. B.

$$\sigma p_1^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \lambda_2^2 & . & . & . & . \\ \lambda_2^3 & . & . & . & . \\ \lambda_2^4 & . & . & . & . \end{vmatrix} = \begin{matrix} (\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4) & . & . & . & (\lambda_2-\lambda_6) \\ . & (\lambda_3-\lambda_4) & (\lambda_3-\lambda_5) & (\lambda_3-\lambda_6) & \\ . & . & (\lambda_4-\lambda_5) & (\lambda_4-\lambda_6) & \\ . & . & . & (\lambda_5-\lambda_6) & \end{matrix} = P_1$$

also $\sigma p_i = \pm\sqrt{P_i}$; hieraus ergeben sich 32 solche Gerade p^2.

Es taucht hier noch die Frage auf, ob es bei einem allgemeinen Komplexe $K^2_{\pi\pi} = 0$ Gerade gibt, die allen K^n gemeinsam sind. Es tritt dann zu obigen Gleichungen noch $K^6_{pp} = 0$ oder $\Sigma \lambda_i^5 p_i^2 = 0$ hinzu. Diese sechs Gleichungen können aber nur dann zusammen bestehen, wenn die Determinante P aus den Koeffizienten von p_i^2 verschwindet, d. h. es muß

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \lambda_1^2 & . & . & . & . & . \\ \lambda_1^3 & . & . & . & . & . \\ \lambda_1^4 & . & . & . & . & . \\ \lambda_1^5 & . & . & . & . & \lambda_6^5 \end{vmatrix} = 0$$

sein. Nun ist aber P^2 die Diskriminante von (53), bei einem allgemeinen Komplexe gibt es also keine solchen Geraden.

Ist $K^5_{pp} = 0$, so ist $K^3_{\pi p}$ speziell; seine Achse schneidet zufolge $K^3_{pp} = 0$ und $K^4_{pp} = 0$ die Achsen p^2 und q^2 von $K^1_{\pi p}$ und $K^2_{\pi p}$. Da sich nun p^2 und q^2 schneiden, so liegt $K^3_{\pi p}$ entweder in der Ebene $(p^2 q^2)$ oder geht durch den Punkt $(p^2 q^2)$. Beides zusammen kann bei einem allgemeinen Komplexe nicht eintreten; denn dann wäre $\lambda_i^2 p_i = \varkappa_1 p_i + \varkappa_2 \lambda_i p_i$, also $\lambda_i^2 = \varkappa_1 + \varkappa_2 \lambda_i$, es müßte somit

$$\begin{vmatrix} \lambda_i^2 & \lambda_i & 1 \\ \lambda_k^2 & \lambda_k & 1 \\ \lambda_l^2 & \lambda_l & 1 \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden, also auch die p_i identisch Null sein.

Wenn die Achse r^2 von $K^3_{\pi p}$ in der Ebene $(p^2 q^2)$ liegt, so können wir p^2, q^2, r^2 als Koordinatendreieck wählen.

Der Komplexkegelschnitt der Ebene $(p^2 q^2) = v'$ ist dann $K^6_{pp} \cdot u_z'^2 = 0$, also ein Doppelpunkt. p^2 hat mit F_{p^2} im Punkte $(p^2 q^2)$ vier Punkte gemeinsam. Geht r^2 durch den Punkt $(p^2 q^2)$, ohne in v' zu liegen, so erhalten wir dual als Komplexkegel von $(p^2 q^2)$ die Doppelebene v'. Diese 16 Doppelpunkte und Doppelebenen sind die 16 Doppelpunkte und Doppelebenen der Singularitätenfläche. Sie bilden mit den 32 Geraden p^2 die Kummersche Konfiguration.

Wir führen schließlich noch die transformierten Gleichungen der Komplexsysteme S^i in Komplexebenenkoordinaten an. Es wird

$$(75) \qquad \sum\nolimits_{\tau\tau}^{20} \equiv \sum \tau_{ik}^2 = 0\,,$$

$$\sum\nolimits_{\tau\tau}^{2} \equiv \sum \frac{\tau_{ik}^2}{\lambda_{ik}} = 0\,,$$

$$\vdots$$

$$(76) \qquad \sum\nolimits_{\tau\tau}^{n} \equiv \sum \frac{\tau_{ik}^2}{\lambda_{ik}^{n-1}} = 0\,.$$

Voraussetzung für die vorstehenden Ableitungen war, daß die Diskriminante von (53) nicht verschwindet.

Die Gleichung der Singularitätenfläche F_x war in Punktkoordinaten $x: a'_x b'_x \alpha'_x \beta'_x a'_c \alpha'_\gamma b'_c \beta'_\gamma = 0$, oder wenn wir $a'_x \alpha'_x a'_y \alpha'_y = K^2_{xy}$ setzen, so wird nicht symbolisch

$$(77)\quad F_x \equiv \frac{1}{32} \sum_i \sum_k \sum_r \sum_s \frac{\partial^2 K^2_{xy}}{\partial y_i \, \partial y_k} \cdot \frac{\partial^2 K^2_{xy}}{\partial y_r \, \partial y_s} \cdot \frac{\partial^2 K^2_{\pi\pi}}{\partial \pi_{ir} \, \partial \pi_{ks}} = 0 .$$

Ist der Komplex $K^2_{\pi\pi}$ speziell von der Art, daß alle seine Gerade Tangenten einer Fläche 2. Ordnung f^2_x sind, so erhält man als Gleichung der Singularitätenfläche $\frac{1}{32} A \cdot (f^2_x)^2$, wobei A die Diskriminante von $f^2_x = 0$ bedeutet.

Wenden wir dies auf den Komplex (25), Abschnitt II, an, so erhalten wir, wie oben angedeutet wurde, das Quadrat der Fläche 2. Ordnung, welche zu dem Netze $(a\,b\,c)$ gehört.

IV. Abschnitt.

Die linearen Komplexe im vierdimensionalen Raum.

1. Einleitung.

Wir beginnen mit einigen allgemeinen Betrachtungen in einem Operationsraum von n Dimensionen. Ein Punkt P_i ist durch $(n+1)$ Verhältniszahlen $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{n+1}^{(i)}$ bestimmt.

Es sei d eine ganze, positive Zahl $<n$, also d höchstens gleich $n-1$. Ein linearer R_d ist durch $(d+1)$ voneinander unabhängige Punkte bestimmt; diese Punkte seien $P_1, P_2, \ldots, P_{d+1}$. Die Koordinaten derselben können in eine Matrix M zusammengestellt werden, so daß

$$M \equiv \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n+1}^{(1)} \\ x_1^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ x_1^{(d+1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n+1}^{(d+1)} \end{vmatrix}.$$

Aus dieser Matrix M lassen sich nun $\binom{n+1}{d+1}$ verschiedene, $(d+1)$reihige Determinanten bilden, welche wir die „Koordinaten des R_d“ im R_n nennen wollen, und zwar hier „Punktkoordinaten“, da der R_d durch Punkte bestimmt wurde.

Weil $\binom{n+1}{d+1} = \binom{n+1}{n-d}$, so haben zwei Räume R_d und R_{n-d-1} die gleiche Anzahl von Größen zu Koordinaten, sie stehen sich im R_n dual gegenüber.

Wir behandeln gleich den einfachsten Fall, wo $d=n-1$ ist. Die Koordinaten des R_{n-1} sind dann $\binom{n+1}{n}=n+1$ Zahlen, die wir mit u'_i bezeichnen und „Raumkoordinaten“ nennen. Von nun an gilt also $d>0$, $d<n-1$.

Ist durch n Punkte ein R_{n-1} gegeben und P_{n+1} ein weiterer Punkt, so drücken wir die Bedingung, daß P_{n+1} im R_{n-1} liegt, durch Nullsetzen der Determinante

$$D=|x_1^{(1)},\ x_2^{(2)},\ \ldots,\ x_{(n+1)}^{(n+1)}|$$

aus, oder wenn wir nach der letzten Zeile entwickeln:

$$(1)\qquad \underline{u'_x\equiv x_{u'}=0\,.}$$

Ein R_d kann bestimmt sein entweder durch $(d+1)$ Punkte als Verbindungsraum, oder durch $(n-d)\,R_{n-1}$ als Schnittgebilde. Nehmen wir zuerst den ersteren Fall; es seien P_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ d+1)$ die $(d+1)$ Punkte, welche den R_d bestimmen. Wenn wir in M die $i$te, $k$te, $l$te ... Vertikalreihe zu einer Determinante zusammenfassen, so erhalten wir eine Punktkoordinate des R_d, die wir entsprechend den Vertikalreihen mit $p_{i,k,l,\ldots}$ bezeichnen. Da nun $p_{i,k,l,\ldots}=-p_{k,i,l,\ldots}$ ist, so können wir diese Koordinaten $p_{i,k,l,\ldots}$ durch n-dimensionale, $(d+1)$-fältige Komplexsymbole darstellen. Es wird also $p_{i,k,l,\ldots}=p_i\,p_k\,p_l\ldots.$ Ähnlich wie wir früher von einer Geraden p^2 sprachen, sagen wir kurz $R_d(p^{d+1})$ für einen R_d mit den Punktkoordinaten $p_{i,k,l,\ldots}$. Die $i,\ k,\ l,\ \ldots$ geben eine Indizesgruppe, welche einen Teil der Zahlen $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n+1$ bildet. Der andere Teil dieser Zahlen gibt die zu $i,\ k,\ l,\ \ldots$ „komplementäre“ Gruppe $i',\ k',\ l',\ \ldots.$

Über das Vorzeichen, welches der Koordinate $p_{i,k,l,\ldots}$ zu geben ist, wird gleich entschieden werden.

Es seien außer den $(d+1)$ Punkten, welche den $R_d(p^{d+1})$ bestimmen, noch weitere $(n-d-1)$ Punkte gegeben. Diese geben mit einem der ersteren zusammen $(n-d)$ Punkte, durch welche wir einen $R_{n-d-1}(q^{n-d})$ legen. Der $R_d(p^{d+1})$ und der $R_{n-d-1}(q^{n-d})$ schneiden sich dann in jenem Punkte P_{d+1}, welcher sowohl der Gruppe von $(d+1)$, als auch der von $(n-d)$ Punkten angehört. Es ist dann

$$D = \left| \begin{array}{ccccc} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \ldots & x_{n+1}^{(1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1^{(d+1)} & \ldots & & \ldots & x_{n+1}^{(d+1)} \\ \hline x_1^{(d+1)} & \ldots & & \ldots & x_{n+1}^{(d+1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & & \ldots & x_{n+1}^{(n+1)} \end{array} \right| \equiv 0 .$$

Zieht man zwischen den zwei gleichen Zeilen $x_i^{(d+1)}$ einen Horizontalstrich und entwickelt, so wird also die Bedingung, daß sich ein $R_d(p^{d+1})$ und ein $R_{n-d-1}(q^{n-d})$ schneiden:

(2) $$\underline{\Sigma p_{i,k,l,\ldots} \cdot q_{i',k',l',\ldots} = 0 .}$$

Die Entwicklung von D erfolgte hierbei nach $(d+1)$- und $(n-d)$-reihigen Minoren. Dem $(d+1)$-reihigen Minor $p_{i,k,\ldots,s}$ ist in D eine komplementäre Unterdeterminante $q_{i',k',\ldots,s'}$ zugeordnet, über deren Vorzeichen sich folgendes ergibt (vgl. Weber, Lehrb. d. Algebra I, § 26). Das Vorzeichen ist von der Anordnung der $i', k', \ldots, s'$ abhängig. Wir wollen diese Indizes immer der Größe nach schreiben, so daß links der kleinste steht. Ebenso sollen $i, k, \ldots, s$ geordnet sein. Dem Produkte $p_{ik\ldots s} q_{i'k'\ldots s'}$ kommt dann ein bestimmtes Vorzeichen $\varphi_{ik\ldots s}$ zu, welches von den Werten $i, k, \ldots, s$ abhängig ist. Wenn wir aus der Reihe

$$R = 1, 2, 3, \ldots, n+1$$

die Zahlen $i, k, \ldots, s$ herausgreifen und durch aufeinanderfolgende Transpositionen nach links schaffen, so entsteht die Reihe

$$R' = i, k, \ldots, s, \quad i', k', \ldots, s' .$$

$\varphi_{ik\ldots s}$ ist nun $+1$ oder -1, je nachdem man R' aus R durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen erhält.

Wir schreiben also jetzt statt (2):

(2a) $$\underline{D = \Sigma \varphi_{ik\ldots s} p_{ik\ldots s} q_{i'k'\ldots s'} .}$$

Wenn wir die $(n+1)$-reihige Determinante

$$\varDelta = \left| \begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & \cdot & \cdot \quad \cdot & p_{n+1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdot & \cdot \quad \cdot & p_{n+1} \\ \hline q_1 & q_2 & q_3 & \cdot & \cdot \quad \cdot & q_{n+1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ q_1 & q_2 & q_3 & \cdot & \cdot \quad \cdot & q_{n+1} \end{array} \right|$$

entwickeln und beachten, da p und q Komplexsymbole sind, so erhalten wir

$$\varDelta = (d+1)!\,(n-d)!\,\Sigma\,\varphi_{ik\ldots s}\,p_{ik\ldots s}\,q_{i'k'\ldots s'}\,.$$

Wir setzen nun für $\varDelta$ die Abkürzung $(p^{d+1}\,q^{n-d})$, dann ist also

(2b) $\underline{(p^{d+1}\,q^{n-d}) = (d+1)!\,(n-d)!\,\Sigma\,\varphi_{ik\ldots s}\,p_{ik\ldots s}\,q_{i'k'\ldots s'}\,.}$

Somit folgt auch $(p^{d+1}\,q^{n-d}) = (d+1)!\,(n-d)!\,D$, so daß $\varDelta$ und D gleichzeitig verschwinden.

Wir können aus R' eine neue Reihe

$$R'' = i',\ k',\ \ldots,\ s',\quad i,\ k,\ \ldots,\ s$$

durch Transpositionen ableiten. Es sind hierzu $(d+1)(n-d)$ Vertauschungen notwendig. Diesen entsprechen die Vertauschungen, die man vornehmen muß, um von $(p^{d+1}q^{n-d})$ auf $(q^{n-d}\,p^{d+1})$ zu kommen. Es ist bei Entwicklung der Determinante $(q^{n-d}\,p^{d+1})$ analog (2b):

(2c) $\underline{(q^{n-d}\,p^{d+1}) = (n-d)!\,(d+1)!\,\Sigma\,\varphi_{i'k'\ldots s'}\,q_{i'k'\ldots s'}\,p_{ik\ldots s}\,.}$

Da nun aber

$$(p^{d+1}\,q^{n-d}) = (-1)^{(d+1)(n-d)}\,(q^{n-d}\,p^{d+1})$$

ist, so wird also nach (2b) und (2c)

$$\text{(2d)} \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_{i'k'\ldots s'} = (-1)^{(d+1)(n-d)}\,\varphi_{ik\ldots s}\,, & \text{daraus folgt, da} \\ (\varphi_{i'k'\ldots s'})^2 = (\varphi_{ik\ldots s})^2 = +1 \quad \text{ist,} & \\ \varphi_{ik\ldots s}\,\varphi_{i'k'\ldots s'} = (-1)^{(d+1)(n-d)}\,. & \end{array} \right.$$

Wir gehen nun wieder von den $(d+1)$ Punkten aus, *welche einen* R_d bestimmen. Wir nennen die Gruppe (das

Simplex) von $(d+1)$ Punkten die Gruppe A. B sei eine zweite Gruppe von $(n-d)$ Punkten, welche einen $R_{n-d-1}(q^{n-d})$ bestimmen. Wenn der R_d und der R_{n-d-1} voneinander unabhängig sind, so ist $M \gtrless 0$, wo

$$M = \left|\begin{array}{ccccc} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & x_{n+1}^{(1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1^{(d+1)} & x_2^{(d+1)} & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & x_{n+1}^{(d+1)} \\ \hline x_1^{(d+2)} & x_2^{(d+2)} & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & x_{n+1}^{(d+2)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & x_{n+1}^{(n+1)} \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} x \\ \vdots \\ x \end{array}}\right\} A \\ \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} x \\ \vdots \\ x \end{array}}\right\} B\,. \end{array}$$

Lassen wir nun in A einen beliebigen Punkt P_i $(i \geqq 1,\ i \leqq d+1)$ weg; die übrigbleibenden d Punkte A geben mit B zusammen $d+n-d=n$ Punkte, welche einen R_{n-1} bestimmen. In diesem R_{n-1} ist der R_{n-d-1}, welcher durch B bestimmt ist, enthalten. Wenn wir so immer einen anderen Punkt in A weglassen, so erhalten wir $(d+1)$ Räume R_{n-1}, von denen jeder durch den $R_{n-d-1}(q^{n-d})$ hindurchgeht. Diese $(d+1) R_{n-1}$ bestimmen also den $R_{n-d-1}(q^{n-d})$; die Koordinaten dieser R_{n-1} können somit dazu benützt werden, die Raumkoordinaten des durch B bestimmten R_{n-d-1} zu berechnen.

Lassen wir in A den Punkt P_i weg, so erhalten wir mit B einen R_{n-1}, dessen Koordinaten $u_k'^{(i)}$ $(k=1,\ldots,n+1)$ seien. Diese $u_k'^{(i)}$ sind dann offenbar die Minoren von $x_k^{(i)}$ in M. Die Raumkoordinaten $q'_{i,k,\ldots,s}$ des $R_{n-d-1}(q^{n-d})$ sind nun $(d+1)$-reihige Determinanten der Matrix

$$\left|\begin{array}{ccccc} u_1'^{(1)} & u_2'^{(1)} & \cdot & \cdot\;\cdot & u_{n+1}'^{(1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ u_1'^{(i)} & u_2'^{(i)} & \cdot & \cdot\;\cdot & u_{n+1}'^{(i)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ u_1'^{(d+1)} & u_2'^{(d+1)} & \cdot & \cdot\;\cdot & u_{n+1}'^{(d+1)} \end{array}\right|$$

und da deren Elemente selbst wieder n-reihige Determinanten sind, so folgt nach einem Satze über adjungierte Determinanten (vgl. Weber, Lehrb. d. Algebra I, § 31)

$$\varphi_{ik\ldots s}\, q'_{ik\ldots s} = \mathrm{M}^{(d+1)-1}\, \mathrm{q}_{i'k'\ldots s'}\,.$$

Hier ist $(i\,k \ldots s)$ zu $(i'k' \ldots s')$ komplementär, und es sind die Indizes der Größe nach geordnet. Nach Voraussetzung war $M \gtrless 0$; wir können, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, $M = 1$ setzen, dann wird:

$$\underline{\varphi_{ik\ldots s}\, p'_{ik\ldots s} = p_{i'k'\ldots s'}\,.} \tag{3}$$

Daraus folgt der wichtige Satz:

„Die Raumkoordinaten können, abgesehen vom Vorzeichen, durch ihre komplementären Punktkoordinaten ersetzt werden.“

Demzufolge wird aus (2a) die Bedingung, daß sich ein $R_d(p^{d+1})$ und ein $R_{n-d-1}(q^{n-d})$ schneiden

$$\Sigma\, \varphi_{ik\ldots s}\, p_{ik\ldots s} \cdot \varphi_{i'k'\ldots s'}\, q'_{ik\ldots s} = 0$$

oder nach (2d):

$$(-1)^{(d+1)(n-d)}\, \Sigma\, p_{ik\ldots s}\, q'_{ik\ldots s} = 0\,.$$

Da hier die $i, k, \ldots, s$ der Größe nach stehen und p, q' Komplexsymbole sind, können wir dies bedeutend einfacher schreiben. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}(p_{q'})^{d+1} = (q'_p)^{d+1} &= (p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \cdots + p_{n+1} q'_{n+1})^{d+1} \\ &= (d+1)!\, \Sigma\, p_{ik\ldots s}\, q'_{ik\ldots s}\,;\end{aligned}$$

somit wird die Bedingung auch:

$$\underline{p_{q'}^{d+1} \equiv q'^{\,d+1}_{p} = 0\,.} \tag{4}$$

Wir bezeichnen auch hier wieder, wie früher bei den Geraden im R_3, die linearen R_d durch einen einzigen Buchstaben; ist dieser gestrichelt, so ist R_d durch seine Raumkoordinaten gegeben. Durch $R_d(p^{d+1})$ und $R_d(p'^{\,n-d})$ ist also derselbe Raum R_d bezeichnet.

Aus (2b) erhält man

$$\begin{aligned}(p^{d+1}\, q^{n-d}) &= (d+1)!\, p'^{\,n-d}_{q} \\ &= (n-d)!\, (-1)^{(n-d)(d+1)}\, p^{d+1}_{q'}\,,\end{aligned}$$

also wird

$$\underline{\frac{p^{d+1}_{q'}}{(d+1)!} = (-1)^{(n-d)(d+1)}\, \frac{p'^{\,n-d}_{q}}{(n-d)!}\,.} \tag{5}$$

Für spätere Rechnungen wollen wir uns noch anmerken:

$$(5a)\quad \underline{(p^{d+1} q^{n-d}) = (d+1)!\, p_q'^{\,n-d} = (-1)^{(n-d)(d+1)}(n-d)!\, p_{q'}^{d+1}}\,.$$

Zu (4) bemerken wir folgendes: Lassen wir q' veränderlich, aber so, daß durch $q'_{ik\ldots s}$ ein R_{n-d-1} dargestellt wird, so ist (4) die „Gleichung“ des $R_d(p^{d+1})$, der so durch alle ihn schneidenden R_{n-d-1} dargestellt erscheint. Sind die $q'_{ik\ldots s}$ ganz willkürlich, so erhalten wir einen „Komplex $K_d^{(n)}$ von Räumen R_d im R_n“. Im R_4 werden wir also mit dem Geradenkomplex $K_1^{(4)}$ und dem Ebenenkomplex $K_2^{(4)}$ zu tun haben.

2. Die linearen Räume des R_4.

Die Koordinaten von Punkten bezeichnen wir mit den Buchstaben $x, y, z, \ldots$; die von Räumen (R_3) mit $u', v', w', \ldots$. Die Koordinaten der Ebenen und Geraden werden durch Symbole $\pi, p, q, \ldots$ dargestellt. Diesen Symbolen geben wir auch einen Exponenten, welcher sofort erkennen läßt, ob eine Gerade oder eine Ebene dargestellt wird. So ist z. B. durch p^2 eine Gerade, durch p^3 eine Ebene in Punktkoordinaten gegeben. Raumkoordinaten werden gestrichen, also zeigt z. B. p'^3 eine Gerade p^2, q'^2 eine Ebene q^3 an. Für veränderliche Geraden- und Ebenenkoordinaten wenden wir gewöhnlich das Symbol π an. Statt Geradenkoordinaten sagen wir auch Strahlenkoordinaten.

Wir gehen nun daran, die geometrischen Grundoperationen des Schneidens und Verbindens von linearen Räumen in R_4 analytisch darzustellen. Nach einem oben angeführten Satze wird im R_4 eine Gerade durch alle sie schneidenden Ebenen und umgekehrt dargestellt; es sind Gerade und Ebene dual zueinander.

Die Gleichung des Punktes y ist

$$(6)\qquad \underline{u'_y = 0}\,.$$

Die Punkte x, y bestimmen eine Gerade p^2, drei weitere z, t, s eine Ebene q^3. Schneiden sich p^2 und q^3, so liegen die fünf Punkte x, y, z, t, s in einem R_3, es liegt also z. B. x in dem schon durch y, z, t und s bestimmten R_3, d. h. es ist

$$(x\,y\,z\,t\,s) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & & \vdots \\ s_1 & \cdot & \cdot & \cdot & s_5 \end{vmatrix} = 0 .$$

Nach den ersten zwei Zeilen entwickelt, wird hieraus:

$$\Sigma (x\,y)_{12}\,(z\,t\,s)_{345} = 0$$

oder

$$\Sigma p_{ik}\, q_{mnl} = 0 , \qquad (i\,k \,\#\, m\,n\,l)$$

also auch

$$p^2_{q'} = 0 \quad \text{oder nach (5)} \quad p'^3_q = 0 ;$$

hieraus erhält man die Gleichung von p^2 in Punkt- oder Raumkoordinaten für veränderliche q:

(7) $$\begin{cases} p^2_{\pi'} = 0 , \\ p'^3_{\pi} = 0 \end{cases}$$

und ebenso die Gleichungen der Ebene q^3:

(8) $$\begin{cases} q^3_{\pi'} = 0 , \\ q'^2_{\pi} = 0 . \end{cases}$$

Die Gleichung des Raumes v' wird schließlich noch:

(9) $$\underline{v'_x = 0 .}$$

Die Gleichungen (7) und (8) lassen noch eine zweite Schreibart zu, wenn wir das im Abschnitt I über Determinanten mit Komplexsymbolen Gesagte berücksichtigen. Wir können für $\Sigma p_{12}\, q_{345}$ schreiben $\frac{1}{12}(p\,p\,q\,q\,q)$, und dafür setzen wir kürzer $\frac{1}{12}(p^2\,q^3)$, somit haben wir:

(10) $$\underline{(p\,p\,q\,q\,q) = (p^2\,q^3) = 12\,\Sigma p_{ik}\, q_{mnl} = 6\, p^2_{q'} ,}$$

oder nach (5)

(10a) $$\underline{(p^2\,q^3) = 2\, p'^3_q .}$$

Schließlich wird wegen $q_{ik} = q'_{mnl}$ $(i\,k \,\#\, m\,n\,l)$

(11) $$\underline{(p^2\,q^3) = (p'^3\,q'^2) .}$$

Es ist weiter

$$(p\,p\,z\,t\,s) = (p^2\,z\,t\,s) = 2\,\Sigma p_{ik} (z\,t\,s)_{mnl}$$

oder, da $\Sigma p'_{mnl}(z\,t\,s)_{mns} = p'_z\,p'_t\,p'_s$ wird,

(12) $$\underline{(p\,p\,z\,t\,s) = 2\,p'_z\,p'_t\,p'_s\,;}$$

hieraus für $z = t = \pi$:

(13) $$\underline{(p\,p\,\pi\,\pi\,s) = (p^2\,\pi^2\,s) = 2\,p'^2_\pi\,p'_s}$$

und

(14) $$\underline{p'^2_\pi\,p'_s \equiv \pi'^2_p\,\pi'_s\,.}$$

Ferner ist

$$(\pi\,\pi\,\pi\,x\,y) = (\pi^3\,x\,y) = 6\,\Sigma\,\pi_{ikl}\,(x\,y)_{mn} = 6\,\Sigma\,\pi'_{mn}\,(x\,y)_{mn}\,,$$

also da $\Sigma\,\pi'_{mn}\,(x\,y)_{mn} = \pi'_x\,\pi'_y$:

(15) $$\underline{(\pi\,\pi\,\pi\,x\,y) = 6\,\pi'_x\,\pi'_y\,.}$$

Ist durch y und z eine Gerade p^2 bestimmt und π^3 eine Ebene, so schneidet p^2 diese Ebene π^3, wenn $(\pi\,\pi\,\pi\,y\,z) = (\pi^3\,y\,z) = 0$ ist. Lassen wir π^3 variabel, so ergibt sich die Gleichung der Verbindungslinie von y und z

(16) $$\underline{\pi'_y\,\pi'_z = 0\,.}$$

Dual wird die Schnittebene zweier R_3 v' und w':

(17) $$\underline{\pi_{v'}\,\pi_{w'} = 0\,.}$$

Lassen wir in (16) $y = x$ unbestimmt und nehmen z als gegeben, so wird die Gleichung des durch die Ebene $p^3(p'^2)$ und z gegebenen Raumes:

(18) $$\underline{p'_x\,p'_z = 0\,.}$$

Dual wird die Gleichung des Schnittpunktes der Geraden p^2 mit dem Raume v':

(19) $$\underline{p_{u'}\,p_{v'} = 0\,.}$$

Der Raum $(y\,z\,t\,s)$ hat die Gleichung $(x\,y\,z\,t\,s) = 0$; bestimmen y und z die Gerade p^2, t und s die Gerade q^2, so ist auch $(x\,p\,p\,q\,q) = (x\,p^2\,q^2) = 0$. Daher wird nach (13) die Gleichung des Raumes $(p^2\,q^2)$:

(20) $$\begin{cases} p^2_{q'}\,q'_x = 0 & \text{oder wegen (14)} \\ p'^2_q\,p'_x = 0\,. \end{cases}$$

Dual wird die Gleichung des Schnittpunktes der Ebenen p^3 und q^3:

$$(21)\qquad \begin{cases} p_{q'}^2 p_{u'} = 0 & \text{oder} \\ p_q'^2 q_{u'} = 0 . \end{cases}$$

Weiters liefert (20) die Gleichung der Ebene $(p^2 x)$:

$$(22)\qquad \underline{p_\pi'^2 p_x' = 0}$$

und (21) die Gleichung der Schnittgeraden $(p^3 v')$:

$$(23)\qquad \underline{\pi_{p'}^2 \pi_{v'} = 0 .}$$

Endlich wird die Gleichung der Ebene $(x y z)$:

$$(24)\qquad \underline{\pi_x' \pi_y' \pi_z' = 0}$$

und dual die Schnittlinie der drei Räume v', w', σ':

$$(25)\qquad \underline{\pi_{v'} \pi_{w'} \pi_{\sigma'} = 0 .}$$

3. Die Identitäten der vierdimensionalen Formen.

Entwickeln wir $u_x' v_y' - v_x' u_y'$, so entsteht eine Summe $\Sigma (u' v')_{ik} (x y)_{ik}$ von zehn Gliedern, die wir analog den Formen im R_3 mit $(u' v')_{(xy)} = (x y)_{(u'v')}$ bezeichnen. Es ist also

$$(26)\qquad \underline{\begin{vmatrix} u_x' & u_y' \\ v_x' & v_y' \end{vmatrix} = \Sigma (u' v')_{ik} (x y)_{ik} = (u' v')_{(xy)} .}$$

Auf ähnliche Weise erhält man die Identität

$$(27)\qquad \begin{vmatrix} u_x' & u_y' & u_z' \\ v_x' & v_y' & v_z' \\ w_x' & w_y' & w_z' \end{vmatrix} = \Sigma (u' v' w')_{ikl} (x y z)_{ikl} = (u' v' w')_{(xyz)} .$$

Statt der Determinanten in (26) und (27) schreiben wir auch abgekürzt nur die Elemente der Hauptdiagonale symbolisch:

$$(u_x' v_y') \quad \text{und} \quad (u_x' v_y' w_z') .$$

Das Produkt der Determinanten $(u' v' w' \sigma' \tau')$ und $(x y z \eta \xi)$ gibt $(u_x' v_y' w_z' \sigma_\eta' \tau_\xi')$; bestimmen wir nun die ξ_i so, daß $u_\xi' = 0$, $v_\xi' = 0$, $w_\xi' = 0$, $\sigma_\xi' = 0$ ist, also

$$\xi_i = (u' v' w' \sigma')_i = \lambda_i ,$$

dann wird

$$\Delta = (u'_x v'_y w'_z \sigma'_\eta \tau'_\xi) = (u'_x v'_y w'_z \sigma'_\eta) \tau'_\lambda ,$$

und es ist daher

$$\Delta = (u' v' w' \sigma' \tau') (x y z \eta \xi) = (u'_x v'_y w'_z \sigma'_\eta) \tau'_\lambda$$
$$= (u'_x v'_y w'_z \sigma'_\eta) (u' v' w' \sigma' \tau') ;$$

somit erhält man:

(28) $\underline{(u'_x v'_y w'_z \sigma'_\eta) = (x y z \eta \lambda) \quad \text{für} \quad \lambda_i = (u' v' w' \sigma')_i .}$

Entwickelt man die Identität

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_{u'} \\ b_1 & . & . & . & . & b_{u'} \\ c_1 & . & . & . & . & . \\ d_1 & . & . & . & . & . \\ e_1 & . & . & . & . & . \\ f_1 & . & . & . & . & f_{u'} \end{vmatrix} = 0$$

nach der letzten Kolonne, so wird:

(29) $\left\{ \begin{array}{l} \underline{(b c d e f) a_{u'} - (a c d e f) b_{u'} + (a b d e f) c_{u'} - (a b c e f) d_{u'}} \\ \underline{\qquad + (a b c d f) e_{u'} - (a b c d e) f_{u'} \equiv 0 .} \end{array} \right.$

Setzen wir nun hier $a = b = p$ und $c = d = q$, wo p und q zweiwertige Komplexsymbole sind, so wird:

$$2(p q q e f) p_{u'} + 2(p p q e f) q_{u'} + (p p q q f) e_{u'} - (p p q q e) f_{u'} \equiv 0.$$

Wenden wir auf die einzelnen Glieder die Formeln (12) und (13) an, so erhalten wir:

$$-2 q'_p q'_e q'_f p_{u'} - 2 p'_q p'_e p'_f q_{u'} + p^2_{q'} q'_f u'_e - p^2_{q'} q'_e u'_f = 0 .$$

Daraus ergibt sich folgende Formel, der wir gleich ihre duale beifügen:

(30) $\underline{q'_p q'_x q'_y p_{v'} \equiv -p'_q p'_x p'_y q_{v'} + \tfrac{1}{2} p^2_{q'} q'_y v'_x - \tfrac{1}{2} p^2_{q'} q'_x v'_y ,}$

(30a) $\underline{q_{p'} q_{u'} q_{v'} p'_x \equiv -p_{q'} p_{u'} p_{v'} q'_x + \tfrac{1}{2} p'^2_q q_{v'} u'_x - \tfrac{1}{2} p'^2_q q_{u'} v'_x .}$

Setzen wir in (30) noch $x = y = r$, so entsteht die Identität:

(31) $\underline{p^2_{q'} r_{q'} r_{u'} + q^2_{r'} p_{r'} p_{u'} + r^2_{p'} q_{p'} q_{u'} \equiv 0 .}$

Ist in (30a) und (30) p mit q vertauschbar, so wird

(32) $$\underline{q'_p q'_x q'_y p_{v'} \equiv +\tfrac{1}{4} p^2_{q'} q'_y v'_x - \tfrac{1}{4} p^2_{q'} q'_x v'_y}$$

und

(32a) $$\underline{q_{p'} q_{u'} q_{v'} p'_x \equiv +\tfrac{1}{4} p'^2_q q_{v'} u'_x - \tfrac{1}{4} p'^2_q q_{u'} v'_x\,.}$$

Setzen wir in (29) $c = d = e = \pi$, $a = b = p$, so wird

$$2(p\,\pi\,\pi\,\pi\,f)\,p_{u'} + 3(p\,p\,\pi\,\pi\,f)\,\pi_{u'} - (p\,p\,\pi\,\pi\,\pi)\,f_{u'} \equiv 0,$$

also nach Anwendung von (13), (15) und (10):

$$-2\,\pi'_x \pi'_p p_{u'} + p'^2_\pi p'_x \pi_{u'} - \pi'^2_p u'_x \equiv 0\,.$$

Wir erhalten also die beiden wichtigen Identitäten:

(33) $$\underline{\pi'_p \pi'_x p_{u'} = -\tfrac{1}{2} \pi^2_{p'} \pi_{u'} p'_x + \tfrac{1}{2} \pi'^2_p u'_x\,,}$$

(33a) $$\underline{\pi_{p'} \pi_{u'} p'_x = -\tfrac{1}{2} \pi'^2_p \pi'_x p_{u'} + \tfrac{1}{2} \pi^2_{p'} u'_x\,.}$$

Schreiben wir in (29) statt a, b, c, d, e, f die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 und setzen $u'_i = (7\,8\,9\,0)_i$, dann wird:

(34) $$\left\{\begin{array}{l} \underline{(2\,3\,4\,5\,6)\,(1\,7\,8\,9\,0) - (1\,3\,4\,5\,6)\,(2\,7\,8\,9\,0) + \ldots} \\ \qquad\qquad \underline{-(1\,2\,3\,4\,5)\,(6\,7\,8\,9\,0) \equiv 0\,.} \end{array}\right.$$

Hier setzen wir nun $1 = 6 = a'$; $2 = 7 = b'$; $3 = 8 = c'$; $4 = 9 = d'$ und $5 = 0 = e'$, dann wird für $J = (a'b'c'd'e')^2$

$$2J = (a'a'c'd'e')\,(b'b'c'd'e') + (a'a'b'd'e')\,(c'c'b'd'e') +$$
$$+ (a'a'b'c'e')\,(d'd'b'c'e') + (a'a'b'c'd')\,(e'e'b'c'd')\,.$$

Nehmen wir weiter $a, b, \ldots$ vertauschbar an, so ist

$$2J = 4(a'a'b'c'd')\,(e'e'b'c'd')\,,$$
$$J = 8\,a_{b'} a_{c'} a_{d'} e_{b'} e_{c'} e_{d'}\,;$$

hier wenden wir auf die vier ersten Faktoren rechts (32a) an, dann wird:

$$J = +4\,a^2_{b'} a_{d'} e^2_{c'} e_{d'}\,.$$

Die Komplexsymbole kann man nun so zusammenziehen, daß man $a^2_{b'} a_i$ gleich wirklichen Größen S_i setzt, dann ist also

(35) $$\underline{S_i = a^2_{b'} a_i} \qquad (a \equiv b)$$

und aus obiger Gleichung wird:

$$J \equiv (a'b'c'd'e')^2 \equiv +4\, S_{a'}^2\,, \tag{36}$$

somit, da die S_i wirkliche Größen sind,

$$J \equiv 0\,. \tag{37}$$

Wir wenden uns nun etwas genauer den Größen zu, die wir als Koordinaten einer Geraden oder einer Ebene im R_4 definiert haben. Es seien die Punkte x, y gegeben, welche die Gerade p^2 bestimmen. Aus der Matrix

$$M \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{vmatrix}$$

ergeben sich dann die zehn Größen $(xy)_{ik} = p_{ik}$ als Strahlkoordinaten. Diese zehn Größen sind nicht voneinander unabhängig, d. h. man kann nicht zehn willkürliche Zahlen als Koordinaten einer Geraden annehmen. Aus der Identität [vgl. Abschnitt I, (2)] $(b\,c)\,(a\,d) + (c\,a)\,(b\,d) + (a\,b)\,(c\,d) \equiv 0$ folgen die fünf nachstehenden Gleichungen, wenn man je eine Kolonne in M wegläßt:

$$(38)\qquad \left\{\begin{array}{rl} \text{I)} & p_{25}\,p_{34} + p_{53}\,p_{24} + p_{45}\,p_{23} \equiv 0\,, \\ \text{II)} & p_{31}\,p_{45} + p_{14}\,p_{34} + p_{51}\,p_{34} \equiv 0\,, \\ \text{III)} & p_{15}\,p_{24} + p_{52}\,p_{14} + p_{12}\,p_{45} \equiv 0\,, \\ \text{IV)} & p_{53}\,p_{12} + p_{13}\,p_{25} + p_{32}\,p_{15} \equiv 0\,, \\ \text{V)} & p_{14}\,p_{23} + p_{42}\,p_{13} + p_{34}\,p_{12} \equiv 0\,. \end{array}\right.$$

Diese fünf Gleichungen sind aber nicht voneinander unabhängig. Eliminiert man aus III) und IV) p_{12} und ebenso aus I) und II) p_{34}, so erhält man dieselbe Gleichung; ebenso wenn man aus II) und III) p_{15} und aus V) und I) p_{23} eliminiert.

Die fünf Gleichungen (38) sind also nur drei unabhängigen äquivalent. Es gibt somit im R_4 ∞^6 viele Gerade und Ebenen.

Die Gleichungen (38) lassen sich sehr einfach symbolisch herleiten. Es ist nämlich $(x\,y\,x\,y\,z) \equiv 0$, also auch $(p\,p\,q\,q\,z) \equiv 0$ für $p = q$. Wir haben also nach (13):

$$p_{q'}^2\, q_z' \equiv 0\,, \tag{39}$$ $(p \equiv q)$

also auch $p_{q'}^2 q_i' \equiv 0$, woraus sich für $i = 1, 2, 3, 4, 5$ die Gleichungen (38) ergeben. Geometrisch ist dies leicht einzusehen. Es ist nämlich $p_{q'}^2 q_x' = 0$ die Gleichung des R_3, welcher von p^2 und q^2 bestimmt wird. Derselbe wird für $p^2 = q^2$ unbestimmt.

Die den Gleichungen (38) für Ebenenkoordinaten entsprechenden sind leicht zu erhalten; wir ersetzen einfach jedes p_{ik} durch sein komplementäres p_{mnl}. Statt (39) wird dann $p_{q'}^2 p_{u'} \equiv 0$.

4. Der lineare Strahlen- und Ebenenkomplex.

Wir führen das meiste nur für den Strahlenkomplex durch, da sich die dualen Ableitungen für den Ebenenkomplex leicht bilden lassen.

Es sei

$$\underline{K_a^{(1)} \equiv \pi_{a'}^2 = 0} \tag{40}$$

die Gleichung des Strahlenkomplexes. Die a_{ik}' sind hierbei beliebige Größen. $K_a^{(1)}$ ist dann ein System von ∞^5 Geraden im R_4, welches durch eine lineare Gleichung dargestellt wird. Statt (40) kann man auch schreiben

$$\underline{\pi_a'^3 = 0\,,} \tag{40a}$$

worin die Geraden des Komplexes in veränderlichen Raumkoordinaten auftreten. Es ist nach (5) $6\,\pi_{a'}^2 \equiv 2\,\pi_a'^3$.

Dual werden die Gleichungen eines Ebenenkomplexes

$$\underline{K_a^{(2)} \equiv \pi_a'^2 = 0} \tag{41}$$

und

$$\underline{\pi_{a'}^3 = 0\,.} \tag{41a}$$

Wenn zwischen den a_{ik}' in (40) keinerlei Gleichungen bestehen, nennen wir den Komplex einen allgemeinen. Genügen die a_{ik}' aber mindestens dreien von den Gleichungen (38), also auch allen fünf, so können sie als Raumkoordinaten einer Ebene a^3 aufgefaßt werden. $\pi_{a'}^2 = 0$ sagt dann aus, daß jede Gerade π^2 des $K_a^{(1)}$ die Ebene a^3 schneidet. Wir sagen dann, der Komplex ist *„speziell“ und* die Ebene a^3 ist seine „Leitebene“.

Dual besteht ein „spezieller Ebenenkomplex“ aus der Gesamtheit der eine feste Gerade, die „Leitlinie“, schneidenden Ebenen.

Damit ein Komplex speziell ist, sind also drei Bedingungen zu erfüllen. Das analytische Kennzeichen dafür ist

$$a_{a'}^2 a_{u'} \equiv 0$$

oder nach (35)

(42) $$\underline{S_{u'} \equiv 0\,.}$$

Für den Ebenenkomplex $K_a^{(2)} \equiv \pi_{\alpha'}^3 = 0$ führen wir analoge Größen $S_i' = a_{b'}^2 b_i'$ ein. $K_{a_1}^{(2)}$ ist dann speziell, wenn

(43) $$\underline{S_x' \equiv 0\,.}$$

Es sei ein Punkt y gegeben. Die Gerade $(x\,y)$ gehört dem $K_a^{(1)} \equiv \pi_{\alpha'}^2 = 0$ an, wenn

(44) $$\underline{R_y \equiv a_x' a_y' = 0}$$

ist, d. h. alle Geraden eines $K_1^{(4)}$, die durch einen Punkt y gehen, liegen in einem R_3, dem zu y „konjugierten“ Raume R_y. Dual für einen $K_2^{(4)}$: Alle Ebenen eines $K_2^{(4)}$, die in einem $R_3(v')$ liegen, gehen durch $P_{v'}$.

Setzen wir in (44) statt $y \ldots y + \lambda z$, so erhält man ein Büschel von konjugierten Räumen mit der Ebene, in der sich R_y und R_z schneiden, als Basis. Diese Ebene nennen wir zur Geraden $p^2 = (y\,z)$ konjugiert. Ihre Gleichung wird:

(45) $$\underline{E_{p^2} \equiv \pi_{a'} \pi_{b'} p_{a'} p_{b'} = 0\,.}$$

Es schneiden also alle Gerade eines $K_1^{(4)}$, welche p^2 treffen, eine feste Ebene E_{p^2}; jede Gerade, welche einen Punkt in E_{p^2} mit einem Punkt auf p^2 verbindet, gehört dem $K_1^{(4)}$ an.

Drei Punkte y, z, t bestimmen eine Ebene p^3. Die Räume R_y, R_z und R_t schneiden sich in der zu „p^3 konjugierten“ Geraden G_{p^3}, deren Gleichung wird:

(46) $$\underline{G_{p^3} \equiv \pi_{a'} \pi_{b'} \pi_{c'} p_{a'} p_{b'} p_{c'} = 0\,.}$$

Die vier Räume R_y, R_z, R_t und R_s endlich schneiden sich in einem, zum Raume $v' = (y\,z\,t\,s)$ konjugierten Punkte $P_{v'}$; dessen Gleichung wird:

(47) $$\underline{P_{v'} \equiv (a'b'c'd'v')\,(a'b'c'd'u') = 0\,.}$$

Diese Gleichung läßt sich aber nach (36) leicht anders schreiben. Es ist

$$P_{v'} = \frac{1}{2} \sum \sum \frac{\partial^2 J}{\partial e_i' e_k'} v_i' u_k',$$

da aber auch $J = (a'b'c'd'e')^2 = 4\,S_{c'}^2$ ist, so wird

$$P_{v'} = 4\,S_{v'} S_{u'},$$

also bleibt

(47a) $$\underline{S_{v'} S_{u'} = 0\,.}$$

Ist $S_i \gtrless 0$, der $K_1^{(4)}$ also allgemein, so wird, wenn $S_{v'} \gtrless 0$ ist, der Punkt $S_{u'} = 0$ zu jedem $R_3(v')$ konjugiert. Wir nennen ihn den „Brennpunkt" des Komplexes. Geht v' durch den Brennpunkt, so ist (47a) identisch Null, der $P_{v'}$ unbestimmt. Ebenso wenn der Komplex speziell ist.

Durch den Brennpunkt S gehen alle konjugierten Räume. Es ist nämlich S in jedem R_y enthalten, da $a_S' a_y' \equiv 0$ ist. Dies gibt die Identität (31) für $p = q = r$; es wird dann $p_{q'}^2 q_r' r_{u'} \equiv 0$, die duale Gleichung hierzu ist $p_q'^2 q_{r'} r_x' \equiv 0$ oder $a_b'^2 b_{c'} c_x' = 0$, woraus für $a_b'^2 b_i = S_i$ folgt

(48) $$\underline{a_S' a_y' \equiv 0\,.}$$

Jeder beliebige R_3 ist also zu S konjugiert. Jede Gerade durch den Brennpunkt S gehört dem Komplex an; die zu einer Geraden konjugierte Ebene und die zu einer Ebene konjugierte Gerade gehen durch S.

Die durch einen $K_1^{(4)}$ (oder $K_2^{(4)}$) bestimmte duale Verwandtschaft (das Nullsystem im R_4) ist nicht umkehrbar. Die Koordinaten v_i' des R_y sind $a_i' a_y' = \lambda v_i'$, und diese Gleichungen sind nach y nicht lösbar, weil die Determinante D der a_{ik}' verschwindet. Wenn wir in

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' & a_{14}' & a_{15}' \\ a_{21}' & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{51}' & \cdot & \cdot & \cdot & a_{55}' \end{vmatrix}$$

Zeilen mit Kolonnen vertauschen, so wird $D = -D$, also $D \equiv 0$. Dies stimmt mit (37); denn es ist auch

$$D = \frac{1}{5!}(a'b'c'd'e')^2 \equiv 0 .$$

Ist der $K_1^{(4)}$ speziell, so wird S unbestimmt in der Leitebene liegend. Diese ist dann zu allen Geraden des R_4 konjugiert.

Beim Ebenenkomplex erhalten wir dual einen „Brennraum" $S'_x = 0$. Jede Ebene in diesem gehört dem $K_2^{(4)}$ an usw.

5. Die ebenen Schnitte eines $K_1^{(4)}$.

Es sei ein $R_3(v')$ durch die vier Punkte $P_1(x)$, $P_2(y)$, $P_3(z)$ und $P_4(t)$ gegeben. Wir fragen nach dem Schnitt des $K_1^{(4)} \equiv \pi_{\alpha'}^2 = 0$ mit dem $R_3(v')$, d. h. nach der Menge von Geraden des $K_1^{(4)}$, die in $R_3(v')$ enthalten sind.

Sind $\xi_\varkappa$ und ξ_λ zwei Punkte in v', so daß also

$$\xi_{\varkappa i} = \varkappa_1 x_i + \varkappa_2 y_i + \varkappa_3 z_i + \varkappa_4 t_i ,$$
$$\xi_{\lambda i} = \lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i + \lambda_3 z_i + \lambda_4 t_i$$

ist, so sind die Koordinaten π_{ik} der Geraden $P_\varkappa P_\lambda$ im R_4:

(49) $$\underline{\pi_{ik} = \sum_{m,n} (\varkappa\,\lambda)_{mn} (P_m P_n)_{ik}} .$$

Hier sind i, k die Zahlen $1, 2, \ldots, 5$; m, n die Zahlen $1, 2, 3, 4$, welche sich auf die Punkte x, y, z, t beziehen. Soll nun $P_\varkappa P_\lambda$ dem $K_1^{(4)} \equiv \pi_{\alpha'}^2 = 0$ angehören, so muß

$$\sum_{i,k} a'_{ik} \sum_{m,n} (\varkappa\,\lambda)_{mn} (P_m P_n)_{ik} = 0$$

sein, oder wenn wir für $(\varkappa\,\lambda)_{mn}$ die dreidimensionalen Linienkoordinaten ϱ_{mn} von $P_\varkappa P_\lambda$ in v' setzen:

(50) $$\underline{\Sigma\, \varrho_{ik}\, a'_{P_i} a'_{P_k} = 0} .$$

Hier ist z. B. für $a'_{P_1} a'_{P_2}$ zu setzen $a'_x a'_y$, da $P_1 = x$ und $P_2 = y$ ist. (50) sagt nun aus, daß der Schnitt des $K_1^{(4)}$ mit dem $R_3(v')$ ein dreidimensionaler Strahlenkompiex $K_{v'}$ ist.

Die Invariante A_{11} von $K_{v'}$ wird:

$$\tfrac{1}{2} A_{11}(K_{v'}) = \Sigma\, a'_{P_i} a'_{P_k} b'_{P_m} b'_{P_n} = \Sigma\, \mathfrak{a}'_x \mathfrak{a}'_y \mathfrak{b}'_z \mathfrak{b}'_t ,$$

woraus durch Vertauschung folgt

$$A_{11} = \tfrac{1}{2}\,(a'_x\, a'_y\, b'_z\, b'_t)\,,$$

also nach (28)

$$= \tfrac{1}{2}\,(a'\,a'\,b'\,b'\,v')$$

und nach (13)

$$= a^2_{b'}\, a_{v'}\,,$$

(51) $$\underline{A_{11} = S_{v'}\,.}$$

$K_{v'}$ ist also nur speziell, wenn entweder der $K_1^{(4)}$ speziell ist oder v' durch den Brennpunkt geht.

Wenn wir bei einem $K_2^{(4)}$ nach jenen Ebenen fragen, die durch einen gegebenen Punkt y gehen, so erhalten wir ein System von ∞^3 Ebenen, welches im R_4 dem dreidimensionalen Strahlenkomplex entspricht. Wir wollen es eine „Ebenengarbe“ nennen. Bei einer „speziellen Ebenengarbe“ existiert dann eine „Leitebene“, welche längs einer Geraden von einer Ebene der Garbe geschnitten wird.

Unter dem Schnitt einer Ebene mit einem $K_1^{(4)}$ verstehen wir die Gesamtheit der Geraden des $K_1^{(4)}$, welche der schneidenden Ebene angehören. Es sei $p^3 = (y\,,\, z\,,\, t)$ diese Ebene und ξ, η zwei Punkte in ihr, so daß

$$\xi_i = \varkappa_1\, y_i + \varkappa_2\, z_i + \varkappa_3\, t_i\,,$$
$$\eta_i = \lambda_1\, y_i + \lambda_2\, z_i + \lambda_3\, t_i\,.$$

Die Koordinaten π_{ik} der Geraden $(\xi\,\eta)$ sind dann

(52) $$\underline{\pi_{ik} = (\varkappa\,\lambda)_{12}\,(y\,z)_{ik} + (\varkappa\,\lambda)_{23}\,(z\,t)_{ik} + (\varkappa\,\lambda)_{31}\,(t\,y)_{ik}\,.}$$

Gehört $(\xi\,\eta)$ dem $K_1^{(4)}$ an, so wird, wenn μ_i die zweidimensionalen Linienkoordinaten in p^3 bedeuten:

(53) $$a'_z\, a'_t\, \mu_1 + a'_t\, a'_y\, \mu_2 + a'_y\, a'_z\, \mu_3 = 0\,,$$

d. h.: Alle Gerade des $K_1^{(4)}$ in p^3 bilden ein Büschel. Den Scheitel desselben nennen wir das „Zentrum“ der Ebene p^3 und bezeichnen es mit Z_{p^3}. Dieses Resultat war vorauszusehen. Wir brauchen nur durch p^3 einen $R_3(v')$ zu legen, welcher den $K_1^{(4)}$ nach einem $K_1^{(3)} = K_{v'}$ schneidet. Dieser wird dann, wie bekannt, nach einem *Büschel von* p^3 geschnitten.

Die ternären Koordinaten des Zentrums Z_{p^3} sind nach (53):

$$a_z' a_t', \quad a_t' a_y', \quad a_y' a_z'.$$

Seine Gleichung als Punkt im R_4 ist also:

$$(54) \qquad \underline{Z_{p^3} \equiv u_y' a_z' a_t' + u_z' a_t' a_y' + u_t' a_y' a_z' = 0\,.}$$

Multiplizieren wir (54) mit 6, so wird das erste Glied $6\, u_y' a_z' a_t' = (a\, a\, a\, z\, t)\, u_y'$; formt man hier rechts nach (29) um, so wird

$$2\, u_y' a_z' a_t' = (a\, a\, y\, z\, t)\, a_{u'} - 2\, a_t' a_y' u_z' + 2\, a_z' a_y' u_t'\,.$$

Schaffen wir hier die zwei letzten Terme rechts nach links, so entsteht das doppelte Trinom von (54), somit wird

$$2\, Z_{p^3} = (a\, a\, y\, z\, t)\, a_{u'} = (a\, a\, p\, p\, p)\, a_{u'}\,,$$

also kommt statt $Z_{p^3} = 0$ als Gleichung des Zentrums von p^3:

$$(55) \qquad \underline{a_{p'}^2\, a_{u'} \equiv a_p'^2\, p_{u'} = 0\,.}$$

Geht p^3 durch S, so fällt Z_{p^3} mit S zusammen; ist der $K_1^{(4)}$ speziell, so ist Z_{p^3} der Schnittpunkt der Leitebene mit p^3, wie (55) zeigt.

Bei einem Ebenenkomplex gibt es dual zu jeder Geraden p^2 einen „Zentralraum", in welchem alle Ebenen des $K_2^{(4)}$ liegen, die durch p^2 gehen. Die Gleichung des Zentralraumes wird

$$(56) \qquad \underline{a_p'^2\, a_x' = 0\,.}$$

Lassen wir in (55) p^3 willkürlich und $u' = v'$ fest, so stellt

$$(57) \qquad \underline{a_{\pi'}^2\, a_{u'} \equiv a_\pi'^2\, \pi_{u'} = 0}$$

einen Ebenenkomplex dar, welcher dadurch definiert ist, daß das Zentrum jeder Ebene dieses Komplexes im Raume $R_3(v')$ liegt.

Wir werden diesem Ebenenkomplex (57) später unter einem allgemeineren Gesichtspunkte wieder begegnen.

Dual wird bei jedem $K_2^{(4)}$ bezüglich eines Punktes ein $K_1^{(4)}$ erzeugt.

Wir bestimmen noch den Brennraum des Komplexes (57). Seine Gleichung sei $S'_x = 0$; in nicht symbolischer Form erhält man für den Brennraum eines $K_2^{(4)}$:

$$S'_x \equiv \frac{1}{3} \sum \frac{\partial K_2^{(4)}}{\partial \pi_{rsi}} \cdot \frac{\partial K_2'^{(4)}}{\partial \pi'_{rs}} x_i = 0 . \tag{58}$$

Hierbei ist für $K_2^{(4)}$ $\pi^3_{a'} = 0$ und für $K_2'^{(4)}$ $\pi_a'^2 = 0$ zu setzen. Die duale Formel ergibt den Brennpunkt eines $K_1^{(4)}$. Aus (58) erhält man für den Komplex (57):

$$S'_x = \tfrac{2}{3} b_a'^2 a_{v'} \cdot v'_x ,$$

d. h. wenn der $K_1^{(4)} \equiv \pi^2_{a'} = 0$ nicht speziell ist, so wird der Brennraum von (57) mit dem erzeugenden Raume $R_{v'}$ identisch. Das duale Ergebnis ist leicht anzugeben.

6. Die Nullsysteme im R_4.

Wir kommen etwas genauer auf die durch einen $K_1^{(4)}$ bestimmte Verwandtschaft (Nullsystem) zwischen Geraden und Ebenen zurück.

Die Gleichung der zu p^2 konjugierten Ebene E_{p^2} ist nach (45):

$$E_{p^2} \equiv \pi_{a'} \pi_{b'} p_{a'} p_{b'} = 0 .$$

Nach (15) wird auch:

$$6 E_{p^2} = (\pi' \pi' \pi' a' b') p_{a'} p_{b'} ;$$

der Ausdruck $(\pi' \pi' \pi' a' b') p_{a'}$ gibt nach (29) entwickelt:

$$2 (\pi' \pi' \pi' a' b') = 3 (\pi' \pi' a' b' a') p_{\pi'} + (\pi' \pi' \pi' a' a') p_{b'} ,$$

also

$$12 E_{p^2} = 3 (\pi' \pi' a' b' a') p_{\pi'} p_{b'} + 6 \pi^2_{a'} p^2_{b'} .$$

Wendet man hier auf $(\pi' \pi' a' b' a') p_{b'}$ abermals (29) an, so wird

$$2 (\pi' \pi' a' a' b') p_{b'} = -2 (\pi' a' a' b' b') \pi'_p - 2 (\pi' \pi' a' b' b') p_{a'} ;$$

vertauscht man hier im 2. Term rechts a und b und schafft das Glied nach links, so folgt:

$$(\pi' \pi' a' a' b') p_{b'} = -\tfrac{1}{2} (\pi' a' a' b' b') \pi'_p ,$$

also wird:

$$E_{p^2} \equiv -\tfrac{1}{4} S_{\pi'} p^2_{\pi'} + \tfrac{1}{2} \pi^2_{a'} \cdot p^2_{b'} . \tag{59}$$

Wir sagen nun analog dem R_3, daß auch hier $2\,K_1^{(4)}$ oder $2\,K_2^{(4)}$ ein Büschel von Komplexen bestimmen.

Dann ist in (59) der Satz enthalten:

E_{p^2} als spezieller $K_1^{(4)}$ aufgefaßt, gehört also dem Büschel an, welches durch den ursprünglichen $K_1^{(4)}(a^3)$ und der durch p^2 und den Brennpunkt S gelegten Ebene (als spezieller Komplex aufgefaßt) gebildet wird. Es ist nämlich $S_{\pi'} p^2_{\pi'} = 0$ die Gleichung der Ebene, welche p^2 mit S verbindet.

Aus (59) ergeben sich ferner folgende Sätze:

Die Geraden, welche ihre konjugierte Ebene schneiden, gehören dem Komplex selbst an.

Die zu einer Komplexgeraden konjugierte Ebene erhält man durch Verbindung mit S.

Ist der Komplex speziell, so fällt jede konjugierte Ebene mit der Leitebene zusammen.

Wir gehen nun weiter zu der einer Ebene p^3 konjugierten Geraden G_{p^3}. Ihre Gleichung ist nach (46):

$$G_{p^3} \equiv \pi_{a'}\pi_{b'}\pi_{c'}\,p_{a'}p_{b'}p_{c'} = 0\,.$$

Durch ähnliche Umformungen wie oben erhalten wir:

$$\begin{aligned}
2\,G_{p^3} &= (\pi'\pi'a'b'c')\,p_{a'}p_{b'}p_{c'}\,,\\
4\,G_{p^3} &= -2(a'a'\pi'b'c')\,p_{\pi'}p_{b'}p_{c'} - (a'a'\pi'\pi'c')\,p^2_{b'}p_{c'}\\
&\qquad + (a'a'\pi'\pi'b')\,p_{c'}p_{b'}p_{c'}\,,\\
-4\,G_{p^3} &= 2(a'a'b'c')\,p_{b'}p_{\pi'}p_{c'} - 2(a'a'\pi'\pi'c')\,p_{c'}p^2_{b'}\,,\\
&= R - N\,,
\end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
-R &= 2(b'a'a'\pi'c')\,p_{b'}p_{\pi'}p_{c'}\\
&= -2(b'b'a'\pi'c')\,p_{a'}p_{\pi'}p_{c'} - (b'b'a'a'c')\,p^2_{\pi'}p_{c'}\\
&\qquad + (b'b'a'a'\pi')\,p_{c'}p_{\pi'}p_{c'}\,.
\end{aligned}$$

Hier verschwindet der mittlere Term rechts nach (48) identisch, beim ersten kann man a' und b' vertauschen und ihn dann nach links schaffen:

$$R = S_{\pi'}\,p_{\pi'}\,p^2_{c'}\,;$$

ferner ist

$$N = 2(c'a'a'\pi'\pi')\,p_{c'}p_{b'}^2$$
$$= -2(c'c'a'\pi'\pi')\,p_{a'}p_{b'}^2 - 2(c'c'a'a'\pi')\,p_{\pi'}p_{b'}^2\,,$$
$$2N = -2(c'c'a'a'\pi')\,p_{\pi'}p_{b'}^2 = -2\,S_{\pi'}p_{\pi'}p_{b'}^2\,.$$

Wir erhalten also schließlich:

$$\underline{G_{p^3} \equiv -\tfrac{1}{2}\,S_{\pi'}p_{\pi'}p_{a'}^2\,.} \tag{60}$$

Es war nach (55) $a_p'^2 p_{u'} = 0$ die Gleichung des Zentrums der Ebene p^3, somit gibt uns (60) den Satz:

Die zu einer Ebene konjugierte Gerade ist die Verbindung ihres Zentrums mit dem Brennpunkte des Komplexes.

Die konjugierte Gerade einer Ebene durch den Brennpunkt ist unbestimmt.

7. Zu den Invarianten eines $K_1^{(4)}$.

Daß ein $K_1^{(4)}$ keine Invarianten besitzt, können wir leicht folgend beweisen:

Mit Hilfe von (29) und durch entsprechende Vertauschungen der Symbole $a, b, c, \ldots$ können wir jede Invariante J symbolisch als Produkt von Faktoren $a_{b'}$ darstellen. Durch (29) werden Determinanten wie $(a\,b\,c\,d\,e)$ auf solche Faktoren zurückgeführt, wobei natürlich auch (12) und (15) Anwendung finden. Wir nehmen also jetzt J in der Form $a_{b'}a_{c'}\ldots$ an und halten uns vor Augen, daß ein ungestrichenes Symbol dreimal, ein gestrichenes Symbol zweimal auftritt. Es kann nun z. B. a an die Symbole b', b', c' gebunden sein, so daß $J = a_{b'}^2 a_{c'}\ldots$ ist. Dann suchen wir in J den weiteren Faktor mit c', etwa $d_{c'}$, und setzen für $a_{b'}^2 a_i$ die wirkliche Größe S_i, so daß $J = S_{c'}c_d'\ldots$ wird. Dies verschwindet aber nach (48) identisch.

Die zweite Möglichkeit tritt ein, wenn a an b', c', d', also an drei verschiedene Symbole gebunden ist, so daß $J = a_{b'}a_c a_{d'}\ldots$ ist. Dann können wir aber (32a) anwenden und kommen auf den ersten Fall zurück.

Die Größen S_i sind natürlich keine Invarianten, wie dies auch geometrisch leicht einzusehen ist, da sie ja die *Koordinaten* des Brennpunktes sind.

Ebenso wie oben beweist man leicht, daß ein $K_1^{(4)}$ als invariante Form mit Raumkoordinaten nur die einzige $S_{u'}$ besitzt, welche, gleich Null gesetzt, den Brennpunkt darstellt.

Das Speziellsein eines $K_1^{(4)}$ kann also nicht durch das Verschwinden von Invarianten dargestellt werden. Erst $S_{u'} \equiv 0$ gibt dies Kennzeichen.

Wir dehnen diese Betrachtungen gleich auf ein System von $2\,K_1^{(4)}$ aus. Diese seien $K_1^{(4)} \equiv \pi_{\alpha'}^2 = 0$ und $L_1^{(4)} \equiv \pi_{\alpha'}^2 = 0$.

Dann lassen sich den Größen $S_i = a_{b'}^2 a_i$ und $T_i = \alpha_{\beta'}^2 \alpha_i$ noch die fünf Größen

(61) $$\underline{R_i = a_{\alpha'}^2 a_i}$$

anschließen.

Es ist natürlich auch $R_i = \alpha_{a'}^2 \alpha_i$. Dann läßt sich wieder jede simultane Invariante J als Produkt von Faktoren $a_{b'}$, $a_{\alpha'}$, $\alpha_{\beta'}$ darstellen und derart umformen, daß sie entweder verschwindet, oder daß sich die Größen R_i, T_i, S_i einsetzen lassen. Wir haben also nur Formen zu untersuchen, in welchen diese Größen in Verbindung mit a und α auftreten, wobei wieder zu berücksichtigen ist, daß $a_S' a_x' \equiv 0$ und $\alpha_T' \alpha_x' \equiv 0$.

Wir gehen nun von den Formen aus:

(62) $$\underline{T_x' \equiv a_T' a_x'\,,}$$

(63) $$\underline{\Sigma_x' \equiv \alpha_S' \alpha_x'\,.}$$

Diese können wir nach (31) umformen, wenn wir für T_i und S_i die Werte in Symbolen α und a einsetzen; dann wird auch

(62a) $$\underline{T_x' \equiv -2\, a_R' a_x'\,,}$$

(63a) $$\underline{\Sigma_x' \equiv -2\, \alpha_R' \alpha_x'\,.}$$

Um nun die möglichen Invarianten der beiden $K_1^{(4)}$ zu bestimmen, haben wir nur noch folgende sechs Formen zu untersuchen: $S_{T'}$, $S_{\Sigma'}$; $T_{T'}$, $T_{\Sigma'}$; $R_{T'}$ und $R_{\Sigma'}$.

Es ist
$$S_{T'} = a_T' a_S' \equiv 0\,,$$
$$S_{\Sigma'} = \alpha_S'^2 \equiv 0\,,$$
$$T_{T'} = a_T'^2 \equiv 0\,,$$
$$T_{\Sigma'} = \alpha_S' \alpha_T' \equiv 0\,,$$

ferner wird

$$R_{T'} = a_{\alpha'}^2 a_{T'} = -a_{\alpha'}^2 a_{b'} b'_T$$

(nach 62), dies gibt nach (31):

$$= a_b'^2 \alpha'_b \alpha'_T + b_\alpha'^2 a'_\alpha a'_T$$

$$= -\alpha'_S \alpha'_T - a'_R a'_T \,,$$

also

$$R_{T'} \equiv 0 \quad \text{und ebenso} \quad R_{\Sigma'} \equiv 0 \,.$$

Es gibt somit keine simultane Invariante bei zwei Strahlenkomplexen im R_4.

Aus obigem schließt man auch leicht, daß durch $R_{u'}$, T'_x und Σ'_x die einzigen Formen gegeben sind, welche eine Reihe Punkt- oder Raumkoordinaten enthalten. Deren geometrische Bedeutung werden wir sofort angeben.

8. Das Komplexbüschel.

Irgend ein Komplex des Büschels sei dargestellt durch

$$K_\varkappa \equiv \varkappa_1 \pi_{\alpha'}^2 + \varkappa_2 \pi_{\alpha'}^2 = 0 \,.$$

Die Gleichung des Brennpunktes von $K_\varkappa$ wird

$$\underline{S_{u'}(K_\varkappa) \equiv \varkappa_1^2 S_{u'} + 2\varkappa_1 \varkappa_2 R_{u'} + \varkappa_2^2 T_{u'} = 0 \,.} \tag{64}$$

Die Brennpunkte bilden also eine quadratische Menge von ∞^1 vielen Punkten, somit:

Die Brennpunkte der Komplexe eines Büschels bilden einen Kegelschnitt Ω, dessen Gleichung in Raumkoordinaten wird nach (64):

$$\underline{\Omega \equiv S_{u'} T_{u'} - R_{u'}^2 = 0 \,.} \tag{65}$$

Die Ebene dieses Kegelschnittes Ω ergibt sich aus drei Brennpunkten beliebiger drei Komplexe $K_\varkappa$, K_λ, K_μ in der Form:

$$\underline{E \equiv \pi'_S \pi'_R \pi'_T = 0 \,.} \tag{66}$$

Daraus folgt, daß nicht nur $S_{u'} = 0$ und $T_{u'} = 0$, sondern auch der Punkt $R_{u'} = 0$ auf E liegen; aus (65) folgt dann weiter, daß sich die Tangenten an Ω in S und T im Punkte R schneiden.

In einem Büschel kommen im allgemeinen keine speziellen Komplexe vor, da hierzu die Erfüllung dreier Bedingungen nötig ist.

In einem $R_3(v')$ wird durch das Büschel ein Büschel von zwei $K_1^{(3)}$ erzeugt. Die Invarianten der zwei Grundkomplexe desselben sind nach (51):

$$A_{11} = S_{v'}\,,$$
$$A_{12} = R_{v'}\,,$$
$$A_{22} = T_{v'}\,.$$

Ist $R_{v'} = 0$, so liegen die beiden $K_1^{(3)}$ involutorisch, wir nennen daher den Punkt R den „Involutionspunkt“.

Für $A_{11} A_{12} - A_{12}^2 = S_{v'} T_{v'} - R_{v'}^2 = 0$ wird das Netz, nach welchem $R_3(v')$ das Büschel schneidet, speziell. $R_3(v')$ berührt dann den Kegelschnitt Ω oder schneidet ihn in zwei zusammenfallenden Punkten entsprechend dem Zusammenfallen der beiden Leitlinien des Netzes.

Ist $S_{u'} \equiv 0$, so sagen wir, die beiden $K_1^{(4)}$ liegen involutorisch. Jeder R_3 schneidet dann dieselben nach zwei $K_1^{(3)}$, welche involutorisch liegen.

Der Brennpunktekegelschnitt Ω zerfällt dann in ein Punktepaar, nämlich in die Brennpunkte der beiden $K_1^{(4)}$. Hierbei ist der Brennpunktekegelschnitt als besonderer quadratischer Raum R_3 aufgefaßt. Der Ort der Brennpunkte der Komplexe $K_\varkappa$ ist dann nach (64) die Verbindungslinie von S und T.

Ω zerfällt ferner noch, wenn einer der $K_1^{(4)}$, etwa $\pi_{a'}^2 = 0$, speziell ist, also für $S_{u'} \equiv 0$. Dann wird

$$\Omega \equiv -R_{u'}^2 = 0\,,$$

also artet Ω in einen Doppelpunkt aus. Die ∞^1 Brennpunkte liegen dann auf der durch R gehenden Geraden (RT).

Sind endlich beide $K_1^{(4)}$ speziell, so ist der Involutionspunkt mit dem Schnittpunkte der Leitebenen identisch; dieser Schnittpunkt, doppelt gezählt, repräsentiert Ω. Für $R_i \gtrless 0$ existiert dann kein spezieller $K_1^{(4)}$ im Büschel außer den Grundkomplexen. Ist jedoch auch noch $R_{u'} \equiv 0$, so liegen die beiden Leitebenen in einem R_3 oder schneiden sich längs einer Geraden. Dann ist jeder $K_1^{(4)}$ des Büschels speziell. Dieser Fall entspricht dem Strahlenbüschel bei einem singulären Netz im R_3. Sollen bei zwei allgemeinen $K_1^{(4)}$ die Brennpunkte zusammenfallen, so muß $\pi_S' \pi_T' \equiv 0$ sein, denn dies ist die Gleichung ihrer Verbindungslinie. Ω ist dann ein Punktepaar.

Wir geben schließlich noch die geometrische Bedeutung der Formen (62) und (63) an. $T'_x = 0$ stellt den zu T bezüglich $\pi^2_{\alpha'} = 0$ konjugierten Raum dar. Ebenso ist $\Sigma'_x = 0$ die Gleichung des zu S bezüglich $\pi^2_{\alpha'} = 0$ konjugierten Raumes. Nach (62a) und (63a) gehen diese Räume auch durch R, ihre Schnittebene ist also mit E, in der Ω liegt, identisch. Deren Gleichung war (66); durch eine leichte Umformung erhält man auch

$$\underline{\pi'_S \pi'_T \pi'_R \equiv 2\, \pi_{T'} \pi_{\Sigma'}}\,, \tag{67}$$

woraus auch folgt, daß E der Schnitt von $T'_x = 0$ und $\Sigma'_x = 0$ ist.

9. Die singulären Gebilde.

Wir sahen oben, daß bei einem $K_2^{(4)} \equiv \pi^3_{\alpha'} = 0$ jedem Punkte y ein $K_1^{(4)}$

$$\underline{K_y \equiv \pi^2_{\alpha'} a'_y = 0} \tag{68}$$

zugeordnet wird als Ort derjenigen Geraden, deren Zentralräume durch y gehen.

Als Brennpunkt von K_y ergibt sich nach der zu (58) dualen Formel $S'_y \cdot u'_y = 0$; man kommt also auf den Punkt y zurück. K_y ist speziell, wenn der $K_2^{(4)}\, \pi^3_{\alpha'} = 0$ speziell ist, oder wenn y im Brennraum $S'_x = 0$ des $K_2^{(4)}$ liegt.

Wir betrachten nun jene Geraden p^2, für welche $a'^2_p a'_i = 0$ wird, d. h. welche allen Komplexen K_y angehören, da dann $a'^2_p a'_y \equiv 0$. Wir nennen sie die singulären Strahlen des Ebenenkomplexes $K_2^{(4)} \equiv \pi^3_{\alpha'} = 0$.

Vor allem kann man beweisen, daß jeder singuläre Strahl p^2 im Brennraum liegt. Es muß dann der Schnittpunkt

$$p_{u'} p_{S'} = 0$$

von p^2 mit $S'_x = 0$ unbestimmt werden, d. h. es muß

$$p_{u'} p_{S'} \equiv 0$$

sein. Nun ist aber

$$\begin{aligned} p_{u'} p_{S'} &= p_{u'} p_{a'} a'^2_b\,, \\ &= -a'^2_b\, p_{a'} p_{u'}\,, \\ &= -a'_p\, a'^2_b\, p_{u'}\,; \end{aligned}$$

dies gibt nach (31):

$$= p_b'^2 p_a' a_{u'} + a_p'^2 a_b' b_{u'} .$$

Da nun p^2 singulär ist, so verschwindet der 2. Term wegen $a_p'^2 a_i' \equiv 0$; der 1. ist nach (14) mit $b_p'^2 b_a' a_{u'}$ identisch und verschwindet also ebenfalls, somit

$$p_{u'} p_{S'} \equiv 0 .$$

Die singulären Strahlen liegen also im Brennraume. Wir untersuchen nun, ob jeder Strahl in S' singulär ist. Es sei q^2 die Gerade $(P_\varrho P_\sigma)$ im Brennraum, wobei

$$P_\varrho \equiv \varrho_{u'} \varrho_{S'} = 0 ,$$
$$P_\sigma \equiv \sigma_{u'} \sigma_{S'} = 0 .$$

q^2 hat dann die Koordinaten $(\varrho\,\sigma)_{ik}\,\varrho_{S'}\,\sigma_{S'}$ und ist singulär, wenn

$$a_\varrho' a_\sigma' a_x' \varrho_{S'} \sigma_{S'} \equiv 0$$

ist.

Nun wird nach (30), wenn man berücksichtigt, daß jeder Ausdruck, der den Faktor $a_{S'}$ enthält, identisch verschwindet:

$$a_\varrho' a_\sigma' a_x' \varrho_{S'} \sigma_{S'} = -\tfrac{1}{2} a_\varrho'^2 a_\sigma' S_\sigma' \cdot S_x' = \tfrac{1}{2} R \cdot S_x' .$$

Der Fall $S_x' \equiv 0$ ist auszuschließen, da sonst der $K_2^{(4)}$ speziell, also überhaupt kein Brennraum vorhanden ist. Der andere Teil R des Ausdruckes rechts ist im allgemeinen von Null verschieden; es ist also nicht jede Gerade von S' singulär. Die Gerade σ^2 schneidet S' in einem Punkte ξ. K_ξ ist dann speziell und stellt eine Ebene E_ξ dar, deren Gleichung

$$E_\xi \equiv a_\pi'^2 a_\xi' \equiv a_\pi'^2 a_\sigma' \sigma_{S'} = 0$$

ist. Schneidet ϱ^2 diese Ebene E_ξ, so ist

$$a_\varrho'^2 a_\sigma' \sigma_{S'} \equiv R = 0 .$$

Man beweist leicht, daß E_ξ durch ξ geht und ganz in S' liegt. Die Schnittpunkte der Strahlen ϱ^2 mit E_ξ (für $R = 0$) sind dann auch die Schnittpunkte von ϱ^2 mit S'. Die Strahlen p^2 bilden daher in E_ξ ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel ξ.

Wir erhalten also in S' zu jedem Punkte ξ ein solches Büschel von singulären Strahlen. Diese bilden daher in

S' einen dreidimensionalen Strahlenkomplex Φ. Jede Gerade p^2 desselben ist Achse eines vierdimensionalen Ebenenbüschels, welches ganz im $K_2^{(4)}$ enthalten ist, d. h. jede Ebene durch p^2 gehört dem $K_2^{(4)}$ an.

Der Komplex Φ entsteht durch den Schnitt irgend eines $K_1^{(4)} K_y$ mit S'. Sind P_1, P_2, P_3, P_4 der Reihe nach die vier Punkte $p_{u'} p_{S'} = 0$, $q_{u'} q_{S'} = 0$, $r_{u'} r_{S'} = 0$, $\varrho_{u'} \varrho_{S'} = 0$ in S', so wird nach (50) die Gleichung von Φ in den dreidimensionalen Linienkoordinaten ω_{ik}:

$$\Sigma\, \omega_{ik}\, a'_{P_i}\, a'_{P_k}\, a'_y = 0 .$$

Hier ist der Koeffizient von ω_{12} z. B.:

$$a'_{P_1}\, a'_{P_2}\, a'_y = a'_p\, a'_q\, a'_y\, p_{S'}\, q_{S'} ,$$

also nach (30)

$$= -\tfrac{1}{2}\, a_p'^2\, a'_q\, S'_q \cdot S'_y .$$

Es sondert sich somit bei jedem dieser Koeffizienten S'_y ab. Φ erscheint daher von y, wie es sein muß, unabhängig.

Ist der $K_2^{(4)}$ speziell, so schneidet jede singuläre Gerade die Leitlinie.

Dual erhalten wir bei jedem $K_1^{(4)}$ eine Ebenengarbe von singulären Ebenen, deren Träger der Brennpunkt ist. Das Strahlenfeld jeder singulären Ebene gehört ganz dem Komplexe $K_1^{(4)}$ an.

Ist der $K_1^{(4)}$ speziell, so ist jede Ebene, welche die Leitebene nach einer Geraden schneidet (mit ihr in einem R_3 liegt), singulär.

10. Zum System von drei Komplexen.

Die $3\, K_1^{(4)}$ seien:

$$K_1 \equiv \pi_{a'}^2 = 0 , \quad K_2 \equiv \pi_{\alpha'}^2 = 0 \quad \text{und} \quad K_3 \equiv \pi_{m'}^2 = 0 .$$

Wir bilden nun eine Reihe von Invarianten vom allgemeinen Typus

$$(69) \qquad \underline{1_2'^2\, 2_{3'}\, 3'_4\, 4_{5'}^2 = (1\,2\,3\,4\,5)} .$$

Für Invarianten dieser Form ergeben sich vor allem einige Identitäten. Vorerst folgt aus (14)

$$(70) \qquad \underline{(1\,2\,3\,4\,5) = (2\,1\,3\,4\,5) = (1\,2\,3\,5\,4) = (2\,1\,3\,5\,4)} .$$

Dann erhält man durch eine einfache Umformung

$$\text{(70a)} \qquad \underline{(1\,2\,3\,4\,5) + (2\,3\,1\,4\,5) + (3\,1\,2\,4\,5) \equiv 0\,,}$$

$$\text{(71)} \qquad \underline{(1\,2\,3\,1\,2) \equiv 0\,.}$$

Aus (70) folgen dann weiter

$$\text{(72)} \qquad \underline{(1\,1\,3\,4\,5) + 2(1\,3\,1\,4\,5) \equiv 0}$$

und schließlich

$$\text{(73)} \qquad \underline{(1\,1\,1\,4\,5) \equiv 0\,.}$$

Berücksichtigt man (71) und (73), so können wir für die drei Komplexe K_1, K_2 und K_3 78 simultane Invarianten hinschreiben. Diese lassen sich dann auf sechs von ihnen mit Hilfe von (69) und (72) reduzieren. Diese sechs Invarianten sind

$$\text{(74)} \qquad \begin{cases} A_1 = (2\,2\,1\,3\,3)\,, & A_2 = (3\,3\,2\,1\,1)\,, \quad A_3 = (1\,1\,3\,2\,2)\,, \\ B_1 = (1\,1\,2\,3\,1)\,, & B_2 = (2\,2\,3\,1\,2)\,, \quad B_3 = (3\,3\,1\,2\,3)\,. \end{cases}$$

Die geometrische Bedeutung des Verschwindens einer dieser Invarianten ist leicht anzugeben. In dem System der $3\,K_i$ existieren im allgemeinen Falle die drei Brennpunkte S_{ii} und die drei Involutionspunkte S_{ik}. Erstere bestimmen die Brennpunkts- oder Fokalebene, letztere die Involutionsebene des Systems.

Ist nun z. B. $A_1 = 0$, so heißt dies

$$1'_{S_{22}}\,1'_{S_{33}} = 0\,,$$

oder die Brennpunkte S_{22} und S_{33} sind bezüglich des K_1 konjugiert.

Ist $B_1 = 0$ oder $\alpha'_{S_{11}}\,\alpha'_{S_{31}} = 0$, so heißt dies S_{11} und S_{31} sind bezüglich K_2 konjugierte Punkte.

Von den sechs Punkten S_{ii} und S_{ik} können je fünf in einem R_3 liegen. Es muß dann eine simultane Invariante verschwinden. Liegen z. B. S_{ii}, S_{23} und S_{31} in einem R_3, so muß $\Omega_{12} = (S_{11}\,S_{22}\,S_{33}\,S_{23}\,S_{31}) = 0$ sein. Man erhält so sechs Invarianten Ω, welche sich aber nach leichter Umformung auf die obigen von (74) zurückführen lassen. Es ist:

$$\text{(75)} \qquad \begin{cases} \Omega_{11} = (S_{23}\,S_{31}\,S_{12}\,S_{22}\,S_{33}) = \frac{1}{4}\,A_1^2 - B_2\,B_3\,, \\ \Omega_{22} = (S_{23}\,S_{31}\,S_{12}\,S_{33}\,S_{11}) = \frac{1}{4}\,A_2^2 - B_3\,B_1\,, \\ \Omega_{33} = (S_{23}\,S_{31}\,S_{12}\,S_{11}\,S_{22}) = \frac{1}{4}\,A_3^2 - B_1\,B_2\,. \end{cases}$$

Und weiter:

$$(76)\quad \begin{cases} \Omega_{23} = (S_{11} S_{22} S_{33} S_{31} S_{12}) = A_2 A_3 - 2 A_1 B_1 \,, \\ \Omega_{31} = (S_{11} S_{22} S_{33} S_{12} S_{23}) = A_3 A_1 - 2 A_2 B_2 \,, \\ \Omega_{12} = (S_{11} S_{22} S_{33} S_{23} S_{31}) = A_1 A_2 - 2 A_3 B_3 \,. \end{cases}$$

Zu bemerken ist hier, daß aus $\Omega_{ii} = 0$ auch $\Omega_{ik} = 0$ folgt, was auch geometrisch evident ist.

Ein Komplex des Systems ist gegeben durch

$$(77)\qquad \underline{\varkappa_1 \pi_{\alpha'}^2 + \varkappa_2 \pi_{\alpha'}^2 + \varkappa_3 \pi_{m'}^2 = 0\,.}$$

Die Gleichung seines Brennpunktes ist:

$$(78)\qquad \underline{S_{u'} \equiv \Sigma \varkappa_i^2 u'_{S_{ii}} + 2 \Sigma \varkappa_i \varkappa_k u'_{S_{ik}} = 0\,.}$$

Die Brennpunkte des Systems bilden also ∞^2 viele Punkte im R_4, d. h. eine Fläche. Wir bestimmen die Ordnung dieser Fläche, d. h. die Zahl der Punkte, in welchen sie von einer Ebene $p'^2 = (u'v')$ geschnitten wird. Es bestehen dann die Gleichungen

$$S_{u'} = 0 \quad \text{und} \quad S_{v'} = 0\,;$$

jede derselben ist quadratisch in den $\varkappa_i$, somit gibt es im allgemeinen vier solche Schnittpunkte. Die Brennpunkte des Systems bilden also eine Fläche 4. Ordnung im R_4. Ein $R_3(u')$ schneidet die Brennpunktsfläche Φ nach einer dreidimensionalen Raumkurve 4. Ordnung. Diese kann in zwei Kegelschnitte zerfallen. Die Bedingung hierfür ist, daß die in den $\varkappa_i$ ternäre Form aus zwei linearen Faktoren besteht, d. h.

$$(79)\qquad u_S'^3 \equiv \begin{vmatrix} u'_{S_{11}} & u'_{S_{12}} & u'_{S_{13}} \\ u'_{S_{21}} & u'_{S_{22}} & u'_{S_{23}} \\ u'_{S_{31}} & u'_{S_{32}} & u'_{S_{33}} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Dies ist also die Gleichung von Φ in Raumkoordinaten.

Jeder $R_3(u')$, welcher durch vier von den Punkten S_{ii} und S_{ik} geht, befriedigt (79).

Sind die $3\,K_1^{(4)}$ speziell, also $S_{ii} = 0$, so wird nach (78) $S_{u'} \equiv 2 \Sigma \varkappa_i \varkappa_k u'_{S_{ik}} = 0$. Man kann dann für $\varkappa_i \varkappa_k$ eine Größe λ_l setzen; durch $S_{u'} = 0$ ist dann ein Punkt in der Ebene der drei Schnittpunkte S_{ik} der drei Leitebenen dargestellt. Φ ist hier also eine Doppelebene.

V. Abschnitt.

Die linearen Komplexe im R_5.

1. Einleitung.

Wir geben zuerst eine allgemeine Ableitung einer Identität im R_n. Es seien durch die Symbole 1, 2, 3, $\ldots, n+1$, $(n+1)$ Größenreihen fixiert, dann erhält man durch Entwicklung der identisch verschwindenden Determinante $|1, 2, 3, \ldots, n+1, u'_x|$, sowie im R_3 und R_4:

$$(1)\quad \begin{cases} (2\,3\,4 \ldots n+1,\, x)\, 1_{u'} - (1\,3 \ldots n+1,\, x)\, 2_{u'} + \ldots \\ + (-1)^{i+1} (1\,2\,3 \ldots i-1,\, i+1 \ldots n+1,\, x)\, i_{u'} + \ldots \\ + (1\,2\,3 \ldots n+1)\, x_{u'} \equiv 0\,. \end{cases}$$

Wir ersetzen nun die Ziffern durch Komplexsymbole nach folgendem Schema:

$$\Big|\, \underbrace{1\,2\,3 \ldots d,\, d+1,}_{p}\ \ \underbrace{d+2,}_{x_1}\ \ \underbrace{d+3}_{x_2}\ \ \ldots\ \ \underbrace{n+1,}_{x_{n-d}}\ \ \underbrace{x}_{x_{n-d+1}} \,\Big|$$

Die p_i sind hierbei $(d+1)$-fältig. Wenn wir diese Substitution in (1) durchführen, so werden die $(d+1)$ ersten Glieder einander gleich. Hierbei ist aber auf die Stellung der einzelnen Symbole von links nach rechts Rücksicht zu nehmen. Durch die Substitution wird aus dem 1. Glied

$$(p\,p\,p \ldots (d\text{-mal}) \ldots p\, x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-d+1})\, p_{u'}\,;$$

hier ist das mit u' verbundene Symbol p aber als erstes zu nehmen, da es ja die Zahl 1 ersetzt hat. Wir müssen also dieses p so weit nach links schaffen, bis es als erstes p in der Determinante steht. Die anderen p behalten ihre

Reihenfolge bei. Durch d-malige Vertauschung wird dies bewirkt, dadurch wird der richtige Wert des ersten Gliedes

$$(-1)^d (p\,p \ldots p\,x_1 x_2 \ldots x_{n-d+1})\, p_{u'} \equiv (-1)^d (p^d x_1 x_2 \ldots x_{n-d+1})\, p_{u'}\,.$$

Aus (1) wird dann

$$(2)\quad \begin{cases} \underline{(-1)^d (d+1)(p^d x_1 x_2 \ldots x_{n-d+1})\, p_{u'}} \\ \underline{\equiv (-1)^d (p^{d+1} x_2 \ldots x_{n-d+1}) u'_{x_1} + \ldots} \\ \underline{+ (-1)^{d+i+1} (p^{d+1} x_1 x_2 \ldots x_{i-1},\, x_{i+1} \ldots x_{n-d+1}) u'_{x_i} + \ldots} \\ \underline{+ (-1)^n (p^{d+1} x_1 \ldots x_{n-d}) u'_{x_{n-d+1}}\,.} \end{cases}$$

Setzen wir hier weiter

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{k+1} = q\,;$$

wo die q_i $(k+1)$-fältige Komplexsymbole sind, so wird:

$$(3)\quad \begin{cases} \underline{(d+1)(p^d q^{k+1} x_1 x_2 \ldots x_{n-d-k})\, p_{u'}} \\ \underline{\equiv (-1)^k (k+1)(p^{d+1} q^k x_1 x_2 \ldots x_{n-d-k})\, q_{u'}} \\ \underline{+ (-1)^{k+1} (p^{d+1} q^{k+1} x_2 \ldots x_{n-d-k}) u'_{x_1} + \ldots} \\ \underline{+ (-1)^{k+i} (p^{d+1} q^{k+1} x_1 \ldots x_{i-1},\, x_{i+1} \ldots x_{n-d-k}) u'_{x_i} + \ldots} \\ \underline{+ (-1)^{n-d} (p^{d+1} q^{k+1} x_1 x_2 \ldots x_{n-d-k-1})\, u'_{x_{n-d-k}}\,.} \end{cases}$$

Wir wollen hier nur noch eine weitere Spezialisierung vornehmen, indem wir setzen:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-d-k} = r\,,$$

wo die r_i $(n-d-k)$-fältige Komplexsymbole bedeuten. Dann wird aus (3):

$$(4)\quad \begin{cases} \underline{(d+1)(p^d q^{k+1} r^{n-d-k})\, p_{u'}} \\ \underline{\equiv (-1)^k (k+1)(p^{d+1} q^k r^{n-d-k})\, q_{u'}} \\ \underline{+ (-1)^{n-d} (n-d-k)(p^{d+1} q^{k+1} r^{n-d-k-1})\, r_{u'}\,.} \end{cases}$$

Die dualen Formeln sind leicht hinzuschreiben.

In den symbolischen Determinanten sind hier jedesmal $(n+1)$ Symbole enthalten. Kommen in einer solchen *Determinante* alle $(d+1)$ Symbole p_i vor, wobei die p_i

$(d+1)$-fältig sind, so kann man auf die gestrichenen Symbole übergehen. Wir geben einige Beispiele hierfür.

Aus $(p^{d+1} x_1 x_2 \ldots x_{n-d})$ erhält man durch Entwicklung nach $(d+1)$-reihigen Minoren:

$$\begin{aligned}&(p^{d+1} x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-d})\\ &= (d+1)!\, \Sigma p_{\alpha,\beta\ldots} (x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-d})_{\alpha',\beta',\gamma'\ldots}\\ &= (d+1)!\, \Sigma p'_{\alpha',\beta',\gamma'\ldots} (x_1 x_2 \ldots x_{n-d})_{\alpha',\beta',\gamma'\ldots}\end{aligned}$$

$$(5)\qquad \underline{(p^{d+1} x_1 x_2 \ldots x_{n-d}) = (d+1)!\, p'_{x_1} p'_{x_2} \ldots p'_{x_{n-d}}}\,.$$

Setzen wir hier $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{k+1} = q$, so wird

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}&\underline{(p^{d+1} q^{k+1} x_1 x_2 \ldots x_{n-d-k-1})}\\ &\underline{= (d+1)!\, p'^{k+1}_{q} p'_{x_1} p'_{x_2} \ldots p'_{x_{n-d-k-1}}}\end{aligned}\right.$$

oder auch, wenn wir q an erster Stelle schreiben:

$$(6\text{a})\qquad \left\{\begin{aligned}&\underline{(p^{d+1} q^{k+1} x_1 x_2 \ldots x_{n-d-k-1})}\\ &\underline{= (-1)^{(d+1)(k+1)} (k+1)!\, q'^{d+1}_{p} q'_{x_1} q'_{x_2} \ldots q'_{x_{n-d-k-1}}}\,.\end{aligned}\right.$$

Setzen wir hier noch $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-d-k-1} = r_i$, so wird:

$$(7)\qquad \begin{aligned}(p^{d+1} q^{k+1} r^{n-d-k-1}) &= (d+1)!\, p'^{k+1}_{q} p'^{n-d-k-1}_{r},\\ &= (-1)^{(d+1)(k+1)} (k+1)!\, q'^{d+1}_{p} q'^{n-d-k-1}_{r},\\ &= (-1)^{(n-d-k-1)(d+k)} (n-d-k-1)!\, r'^{d+1}_{p} r'^{k+1}_{q}\,.\end{aligned}$$

Diese Formeln ließen sich beliebig vermehren durch Einführung weiterer Symbole. Wir wollen uns jedoch jetzt auf den R_5 beschränken. Hier werden wir mit Punkten x, Geraden $p^2 (p'^4)$, Ebenen $p^3 (p'^3)$, Räumen $p^4 (p'^2)$ und endlich vierdimensionalen Räumen v' als einfachsten geometrischen Gebilden zu tun haben. Da Gerade und R_3 dual zueinander sind, können Strahlen- und Raumkomplexe $(K_3^{(5)})$ unter einem behandelt werden. Die Ebenen sind zu sich dual, die Ebenenkomplexe werden also eigens behandelt werden müssen.

2. Der Strahlen- und Raumkomplex.

Sind π_{ik} die Koordinaten einer Geraden, a' Komplexsymbole, so ist

$$\underline{K_1^{(5)} \equiv \pi_{a'}^2 = 0} \tag{8}$$

die allgemeinste lineare Gleichung zwischen den π_{ik} und stellt ein System von ∞^7 vielen Geraden im R_5, einen linearen Komplex $K_1^{(5)}$ dar.

Nach (5), Abschnitt IV ist auch

$$\pi_{a'}^2 = \frac{2!}{4!}\pi_a'^4 = \tfrac{1}{12}\pi_a'^4 ;$$

(8) kann somit auch folgend geschrieben werden:

$$\underline{K_1'^{(5)} \equiv \pi_a'^4 = 0 .} \tag{9}$$

Die Strahlen des $K_1^{(5)}$ sind hier dargestellt durch den Schnitt von $4\,R_4$. Wir nennen den durch (8) und (9) dargestellten Komplex kurz den Komplex K_a.

Dual erhalten wird als Gleichungen eines Raumkomplexes $K_3^{(5)}$:

$$\underline{K_3'^{(5)} \equiv \pi_{a'}^4 = 0 ,} \tag{10}$$

$$\underline{K_3^{(5)} \equiv \pi_a'^2 = 0 .} \tag{11}$$

Wir behandeln gleich die ebenen Schnitte eines $K_1^{(5)}$, d. h. wir suchen jene Strahlen des Komplexes, die in einer Ebene, in einem R_3 und einem R_4 liegen. Man braucht eigentlich nur letzteres zu bestimmen, da man dann in diesem R_4 einen R_3 oder R_2 annehmen kann.

Wir führen diese Betrachtung für einen $K_1^{(n)}$ durch, den wir durch einen R_d schneiden.

Dieser R_d sei durch die $(d+1)$ Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}$ gegeben. Für zwei Punkte ξ und η dieses R_d wird dann:

$$\xi_i = \lambda_1 x_i^{(1)} + \lambda_2 x_i^{(2)} + \ldots + \lambda_{d+1} x_i^{(d+1)} ,$$
$$\eta_k = \mu_1 x_k^{(1)} + \mu_2 x_k^{(2)} + \ldots + \mu_{d+1} x_k^{(d+1)} .$$

Die Gerade $(\xi\eta)$ hat also die Koordinaten im R_n:

$$\pi_{ik} = (\xi\,\eta)_{ik} = \sum_{1,\,d+1}^{r,\,s} (\lambda\,\mu)_{rs}\,(x^{(r)} x^{(s)})_{ik}$$

und sie gehört dem $K_1^{(n)} \equiv \pi_{a'}^2 = 0$ an, wenn

$$\text{(12)} \qquad \underline{\sum_{1,\,d+1}^{rs} (\lambda\,\mu)_{rs}\, a'_{x^{(r)}}\, a'_{x^{(s)}} = 0}$$

ist.

Für $(\lambda\mu)_{rs} (r, s = 1, 2, \ldots, d+1)$ kann man d-dimensionale Linienkoordinaten setzen. Dann haben wir den Satz, der übrigens auch auf jeden Komplex $K_d^{(n)}$ ausgedehnt werden kann:

„Ein R_d schneidet einen $K_1^{(n)}$ nach einem $K_1^{(d)}$."

Wenden wir (12) auf einen $K_1^{(5)}$ an. Für $d = 2$ erhalten wir die drei Variablen $(\lambda\,\mu)_{23}$, $(\lambda\,\mu)_{31}$, $(\lambda\,\mu)_{12}$, für welche wir ω_1, ω_2 und ω_3 schreiben wollen. Nehmen wir ferner noch statt der Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, y, z$ und t, so wird:

$$\omega_1\, a'_z\, a'_t + \omega_2\, a'_t\, a'_y + \omega_3\, a'_y\, a'_z = 0\,.$$

Dies ist die Gleichung eines Punktes in der Ebene $p^3 = (y\,z\,t)$, des „Zentrums der Ebene p^3". Seine Gleichung im R_5 wird:

$$u'_y\, a'_z\, a'_t + u'_z\, a'_t\, a'_y + u'_t\, a'_y\, a'_z = 0\,,$$

oder durch Vertauschung:

$$|\, u'_y\, a'_z\, a'_t \,| = (u'\, a'^2)_{(y z t)} = (u'\, a'^2\, p'^3) = 0\,,$$

also

$$\text{(13)} \qquad \underline{p_{a'}^2\, p_{u'} = 0}$$

oder

$$\text{(13a)} \qquad \underline{a_{p'}^3\, a_{u'} = 0\,.}$$

Nehmen wir in (12) $d = 3$. Dann erhalten wir als Schnitt einen dreidimensionalen Strahlenkomplex $K_1^{(3)}$:

$$\sum_{1,4}^{rs} \omega_{rs}\, a'_{x^{(r)}}\, a'_{x^{(s)}} = 0\,.$$

Dessen Invariante A_{11} wird:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 2 \sum_{1,4}^{r,\,s} a'_{x^{(r)}}\, a'_{x^{(s)}}\, b'_{x^{(\varrho)}}\, b'_{x^{(\sigma)}} \qquad [(\varrho, \sigma) \# (r, s)] \\ &= \tfrac{1}{2} (a'\, a'\, b'\, b')_{(x^{(1)} x^{(2)} x^{(3)} x^{(4)})} \\ &= \tfrac{1}{2} (a'^2\, b'^2)_{(p^4)}\,, \end{aligned}$$

also

(14) $$\underline{A_{11} = \tfrac{1}{4}(p'^2 a'^2 b'^2)},$$

wo p^4 den Schnittraum darstellt. Die Räume π^4, welche den K_a nach einem speziellen $K_1^{(3)}$ schneiden, bilden daher einen $K_3^{(5)}$ $Q = 0$, den „zugeordneten Raumkomplex“.

Q wird nach (14):

(15) $$Q \equiv \pi_{a'}^2 \pi_{b'}^2 = 0$$

oder auch, wie aus (6) leicht abgeleitet werden kann:

(15a) $$\underline{Q \equiv a_{b'}^2 a_{\pi'}^2 = 0}.$$

Nicht symbolisch erhält man Q durch:

(16) $$\underline{Q = K_a \cdot K_b},$$

wie man aus (15) ablesen kann. Die π sind dann aber als vierfältige Symbole aufzufassen.

Dual gehört ebenso zu jedem Raumkomplex K ein „zugeordneter Strahlenkomplex“ Q (K). Wir wollen nun gleich untersuchen, was für ein $K_1^{(5)}$ dem durch (15a) dargestellten $K_3^{(5)}$ zugeordnet ist. Nach (16) wird:

$$\begin{aligned} Q(Q) &= \pi_a'^2 a_{b'}^2 \pi_c'^2 c_{d'}^2, \\ &= \tfrac{1}{4}(\pi'^2 a'^2 b'^2)(\pi'^2 c'^2 d'^2). \end{aligned}$$

Wir setzen nun in der zu (4) dualen Formel $n = 5$, $d = 2$, $k = 1$, dann wird

(17) $$\underline{3(\pi'^2 a'^2 b'^2)\pi_x' = -2(\pi'^3 a' b'^2) a_x' - 2(\pi'^3 a'^2 b') b_x'}.$$

Hier ist a' und b' vertauschbar, also kommt:

18) $$\underline{3(\pi'^2 a'^2 b'^2)\pi_x' = -4(\pi'^3 a' b'^2) a_x'}.$$

Für $x_i = (\pi' c'^2 d'^2)_i$ wird somit

$$\begin{aligned} 3\,Q\,(Q) &= -(\pi'^3 a' b'^2)(a' \pi' c'^2 d'^2), \\ &= +(\pi'^3 a' b'^2)(\pi' a' c'^2 d'^2). \end{aligned}$$

Setzt man in der zu (4) dualen Formel $n = 5$, $d = 3$, $k = 0$, so wird

19) $$\underline{4(\pi'^3 a' b'^2)\pi_x' = (\pi'^4 b'^2) a_x' + 2(\pi'^4 a' b') b_x'}.$$

Für $x_i = (a' c'^2 d'^2)_i$ wird also

$$12\, Q\,(Q) = (\pi'^4 b'^2)(a'^2 c'^2 d'^2) + 2(\pi'^4 a' b')(b' a' c'^2 d'^2)$$
$$= 24\,\pi_{b'}^2 \cdot 2\, a_{c'}^2 a_{d'}^2 - 2 \cdot 24 \cdot \pi_{a'} \pi_{b'} (a' b' c'^2 d'^2)\,.$$
$$Q\,(Q) = 4\, K_a \cdot a_{c'}^2 a_{d'}^2 - 4(a' b' c'^2 d'^2)\, \pi_{a'} \pi_{b'}\,.$$

Setzt man in (1) für $n=5$: $1=2=a'$, $3=b'$, $4=5=c'$ und $6=7=d'$, so wird

$$(20)\quad \left\{ \underline{\begin{aligned} 2(a' b' c'^2 d'^2)\, a'_\pi = +(a'^2 c'^2 d'^2)\, b'_\pi + 2(a'^2 b' c' d'^2)\, c'_\pi \\ + 2(a'^2 b' c'^2 d')\, d'_\pi\,. \end{aligned}} \right.$$

Sind hier a', c' und d' vertauschbar, so wird:

$$(21)\qquad \underline{6(a' b' c'^2 d'^2)\, a'_\pi = (a'^2 c'^2 d'^2)\, b'_\pi\,.}$$

Es wird also:

$$-4(a' b' c'^2 d'^2)\, \pi_{a'} \pi_{b'} = -\tfrac{2}{3}(a'^2 c'^2 d'^2) \cdot b'^2_\pi\,,$$
$$= -\tfrac{4}{3}\, a_{c'}^2 a_{d'}^2 \cdot b'^2_r\,.$$

Wir setzen nun die Invariante des Komplexes $= J$, also

$$(22)\qquad \underline{J = a_{b'}^2 a_{c'}^2\,.}$$

Dann wird:

$$(23)\qquad \underline{Q\,(Q) = \tfrac{8}{3}\, J \cdot K_a\,.}$$

Der dem Komplexe Q zugeordnete $K_1^{(5)}$ führt also auf den ursprünglichen K_a zurück. Die Formen K_a und Q bilden somit ein in sich geschlossenes System. Vorausgesetzt ist hierbei, daß $J \gtrless 0$. J ist hierbei eine Invariante des Komplexes, in dessen Koeffizienten vom 3. Grade. Die geometrische Bedeutung von $J = 0$ werden wir gleich erfahren. Vorläufig wissen wir, daß für $J = 0$, $Q\,(Q)$ identisch verschwindet.

In nicht symbolischer Form entsteht J durch Schiebung von K_a über Q:

$$(24)\qquad \underline{J = \frac{1}{2} \sum_{ik} \frac{\partial K_a}{\partial \pi_{ik}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \pi'_{ik}}\,.}$$

K_a ist hier in der Form (15a) anzunehmen.

3. Der halbspezielle Komplex.

Wir schneiden nun K_a mit einem

$$R_4(v') = (P_1, P_2, P_3, P_4).$$

Aus (12) erhält man dann einen $K_1^{(4)}$:

$$\sum_{1,5}^{rs} \omega_{rs}\, a'_{x(r)}\, a'_{x(s)} = 0$$

als Schnittgebilde, dessen Brennpunkt wir aufsuchen wollen. Sind $\alpha'_{ik} = \beta'_{ik}$ die Koordinaten des Schnittkomplexes, so wird der Brennpunkt $\alpha'^2_\beta \beta_{\varphi'} = 0$, wo φ' Raumkoordinaten in v' sind. Man erhält so als Gleichung des Brennpunktes im R_5:

$$\Sigma a'_{x(r)}\, a'_{x(s)}\, b'_{x(\varrho)}\, b'_{x(\sigma)}\, u'_{x(\tau)} = 0,$$

also durch Vertauschung

$$(a'^2 b'^2 u' v') = 0$$

oder

(25) $$\underline{B_{v'} \equiv a^2_{b'}\, a_{u'}\, a_{v'} = 0.}$$

Wir wollen diesen Punkt $B_{b'}$ kurz den Brennpunkt des $R_4(v')$ nennen. Aus (25) folgt, daß $B_{w'}$ in v' liegt, wenn $B_{v'}$ in w' liegt und umgekehrt.

Wir fragen uns nun, ob es R_4 gibt, welche K_a nach einem speziellen $K_1^{(4)}$ schneiden. Für einen solchen R_4 muß der Brennpunkt unbestimmt werden, also

$$a^2_{b'}\, a_{v'}\, a_{u'} \equiv 0$$

sein. Dies gibt für die sechs homogenen Größen v'_i die sechs Bedingungsgleichungen

$$a^2_{b'}\, a_{v'}\, a_i = 0,$$

welche nur dann zusammen bestehen können, wenn ihre Determinante Δ verschwindet. Es ist nun

$$\Delta = (a\,b\,c\,d\,e\,f)\, a_1 b_2 c_3 d_4 e_5 f_6\, a^2_{g'} b^2_{h'} c^2_{i'} d^2_{j'} e^2_{k'} f^2_{l'},$$

$$= \frac{1}{6!}(a\,b\,c\,d\,e\,f)^2\, a^2_{g'} b^2_{h'} c^2_{i'} d^2_{j'} e^2_{k'} f^2_{l'},$$

Wir setzen nun in (1) für $n = 5 : 1 = 2 = a,\ 3 = b,\ \ldots,\ 7 = f$. Dann wird:

$$\left\{\begin{aligned} &\underline{2(a\,b\,c\,d\,e\,f)\,a_{g'} = (a^2 c\,d\,e\,f)\,b_{g'} - (a^2 b\,d\,e\,f)\,c_{g'} + \ldots} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+ (a^2 b\,c\,d\,e)\,f_{g'}\,.} \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Sind hier a, b, c, d, e, f vertauschbar, so wird aus $\varDelta$:

$$\begin{aligned} 6!\,\varDelta &= \tfrac{5}{2}(a^2 c\,d\,e\,f)\,b_{g'}\,(a\,b\,c\,d\,e\,f)\,a_{g'}\,b_{h'}^2\,c_{i'}^2 \ldots f_{l'}^2\,, \\ &= -\tfrac{5}{2}(a^2 c\,d\,e\,f)\,a_{g'}\,(a\,b\,c\,d\,e\,f)\,b_{g'}\,b_{h'}^2 \ldots f_{l'}^2\,. \end{aligned}$$

Setzt man in (1) für $n = 5 : 1 = 2 = 3 = a,\ 4 = c,\ 5 = d,\ 6 = e,\ 7 = f$, so entsteht die Identität:

$$\left\{\begin{aligned} &\underline{3(a^2 c\,d\,e\,f)\,a_{g'} = (a^3 d\,e\,f)\,c_{g'} - (a^3 c\,e\,f)\,d_{g'}} \\ &\qquad\qquad\qquad \underline{+ (a^3 c\,d\,f)\,e_{g'} - (a^3 c\,d\,e)\,f_{g'}\,.} \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Diese Gleichung wenden wir weiter zur Umformung von $\varDelta$ an. Durch Vertauschung erhält man:

$$\begin{aligned} -\tfrac{2}{5}\cdot 6!\cdot\varDelta &= \tfrac{4}{3}(a^3 d\,e\,f)\,c_{g'}\,(a\,b\,c\,d\,e\,f)\,b_{g'}\,b_{h'}^2 \ldots f_{l'}^2\,, \\ \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{2}{5}\cdot 6!\,\varDelta &= (a^3 d\,e\,f)\,(a\,b\,c\,d\,e\,f)\,c_{g'}\,b_{g'}\,b_{h'}^2 \ldots f_{l'}^2\,. \end{aligned}$$

Eine weitere Identität entsteht aus (1) für $n = 5$, wenn wir setzen: $1 = 2 = 3 = 4 = a,\ 5 = d,\ 6 = e,\ 7 = f$:

$$\underline{4(a^3 d\,e\,f)\,a_{u'} = -(a^4 e\,f)\,d_{u'} + (a^4 d\,f)\,e_{u'} - (a^4 d\,e)\,f_{u'}\,.} \tag{28}$$

Setzen wir hier für $u_2' \cdot \ldots \cdot (b\,c\,d\,e\,f)_i$ und berücksichtigen die Vertauschbarkeit von d, e und f, so erhalten wir weiter:

$$\begin{aligned} -\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{2}{5}\,6!\,\varDelta &= (a^4 e\,f)\,(b\,c\,d^2 e\,f)\,c_{g'}\,b_{g'}\,b_{h'}^2 \ldots f_{l'}^2\,, \\ &= -4!\,(b\,c\,d^2 e\,f)\,b_{g'}\,c_{g'}\,e_{\alpha'}\,f_{\alpha'}\,b_{h'}^2 \ldots f_{l'}^2\,, \\ 12\,\varDelta &= (b\,c\,d^2 e\,f)\,b_{g'}\,c_{g'}\,e_{\alpha'}\,f_{\alpha'}\,b_{h'}^2 \ldots f_{l'}^2\,. \end{aligned}$$

Hier formen wir $(b\,c\,d^2 e\,f)\,b_{g'}$ um nach (1)

$$\left\{\begin{aligned} &\underline{2(b\,c\,d^2 e\,f)\,b_{g'} = (b^2 d^2 e\,f)\,c_{g'} + 2(b^2 c\,d\,e\,f)\,d_{g'}} \\ &\qquad\qquad\qquad \underline{- (b^2 c\,d^2 f)\,e_{g'} + (b^2 c\,d^2 e)\,f_{g'}\,.} \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Dann wird

$$\begin{aligned} 3\,\varDelta &= J\cdot(b^2 d^2 e\,f)\,b_{h'}^2\,d_{j'}^2\,e_{k'}^2\,f_{l'}^2\,e_{\alpha'}\,f_{\alpha'} - 2(b^2 d^2 c\,f)\,e_{g'}\,c_{g'}\,e_{\alpha'}\,f_{\alpha'} \ldots \\ &= A - 2\,B\,. \end{aligned}$$

Weiter ist nach der zu (20) dualen Identität:

$$2(e\,f\,b^2\,d^2)\,e_{a'} = (e^2\,b^2\,d^2)\,f_{a'} + 4(e^2\,f\,b\,d^2)\,b_{a'}\,,$$

hier gibt die Vertauschung von e und b

$$6(e\,f\,b^2\,d^2)\,e_{a'} = (e^2\,b^2\,d^2)\,f_{a'}\,.$$

Somit wird der erste Teil der rechten Seite in 3Δ:

$$\begin{aligned} A = J\cdot(b^2\,d^2\,e\,f)\,b^2_{h'}\,d^2_{j'}\,e^2_{k'}\,f^2_{l'}\,e_{a'}\,f_{a'} &= \tfrac{1}{6}\,J^2\,(e^2\,b^2\,d^2)\,e^2_{a'}\,b^2_{c'}\,d^2_{f'} \\ &= \tfrac{1}{6}\,J^2\cdot M\,, \end{aligned}$$

wobei

$$M = (e^2\,b^2\,d^2)\,e^2_{a'}\,b^2_{c'}\,d^2_{f'}\,.$$

Wenn wir die Koeffizienten in $Q \equiv a^2_{b'}\,a^2_{\pi'}$ mit α_{ik} bezeichnen, also

(30) $$\underline{\alpha_{ik} = a_{ik}\,a^2_{b'}}$$

setzen, so erscheint Q in der Form $\alpha^2_{\pi'} = 0$; die Invariante J für Q gebildet wird dann

$$J(Q) = \tfrac{1}{2}\,(\alpha^2\,\beta^2\,\gamma^2) = \alpha'^2_{\beta}\,\alpha'^2_{\gamma}\,.$$

Wir haben also

$$M = 2\,J(Q)\,.$$

Nun entsteht $J(Q)$ durch Schiebung von Q über $Q(Q)$ nach (24); da nun nach (23) $Q(Q) = \frac{8}{3}\,J\cdot\pi^2_{a'}$, so wird

(31) $$\underline{J(Q) = \tfrac{8}{3}\cdot J^2\,.}$$

Somit erhalten wir

$$M = \tfrac{16}{3}\,J^2$$

und der erste Teil von 3Δ wird:

$$A = \tfrac{8}{9}\,J^4\,.$$

Wir gehen zum zweiten Teil B von 3Δ über. Es ist

$$B = -(c\,f\,b^2\,d^2)\,c_{g'}\,e_{g'}\,e_{a'}\,f_{a'}\,b^2_{h'}\,\ldots\,f^2_{l'}\,,$$

$$2\,B = 2(c\,f\,b^2\,d^2)\,c_{g'}\,e_{g'}\,f_{a'}\,e_{a'}\,b^2_{h'}\,\ldots\,f^2_{l'}\,.$$

Nach der zu (20) dualen Formel wird:

$$2(c\,f\,b^2\,d^2)\,c_{g'} = (c^2\,b^2\,d^2)\,f_{g'} + 4(c^2\,f\,b\,d^2)\,b_{g'}\,,$$

also wird

$$2B = \left((c^2 b^2 d^2) f_{g'} e_{g'} f_{a'} e_{a'} + 4(b^2 f c d^2) c_{g'} e_{g'}\right) f_{a'} e_{a'} b^2_{h'} \ldots f^2_{e'},$$

$$6B = (c^2 b^2 d^2) c^2_{i'} b^2_{h'} d^2_{j'} \cdot f_{g'} e_{g'} f_{a'} e_{a'} \cdot f^2_{l'} e^2_{k'},$$

$$= M \cdot N,$$

$$= \tfrac{16}{3} J^2 \cdot N,$$

wo

$$N = f_{g'} e_{g'} f_{a'} e_{a'} f^2_{l'} e^2_{k'} = \tfrac{1}{2} (f'^2 g' a' l'^2) g'_e a'_e e^2_{k'},$$

$$= \tfrac{1}{2} (g' a' f'^2 l'^2) g'_e a'_e e^2_{k'}.$$

Dies gibt nach der zu (20) dualen Formel:

$$4N = (g'^2 f'^2 l'^2) J + 4(g'^2 a' f' l'^2) f'_e a'_e e^2_{k'},$$

$$12N = 2J^2,$$

$$N = \tfrac{1}{6} J^2,$$

also

$$6B = \tfrac{8}{9} J^4$$

$$-2B = -\tfrac{8}{27} J^4,$$

somit

$$3\Delta = A - 2B = \tfrac{16}{27} J^4$$

und schließlich

$$\underline{\Delta = \tfrac{16}{81} J^4 = (\tfrac{2}{3} J)^4.} \tag{32}$$

Wir sind also durch Δ wieder auf die Invariante J geführt worden. Die Existenz eines R_4, welcher den K_a nach einem speziellen $K_1^{(4)}$ schneidet, hängt also vom Verschwinden von J ab. Wir wollen einen K_a, für den $J = 0$ ist, „halbspeziell“ nennen.

Wenn $a^2_{b'} a_{v'} a_{u'} \equiv 0$ ist, so schneidet jeder $R_4(v')$ den K_a nach einem speziellen Komplex $K_1^{(4)}$. Dann ist aber auch $Q \equiv 0$, d. h. auch jeder R_3 schneidet K_a nach einem speziellen $K_1^{(3)}$. Die a'_{ik} können dann als Koordinaten eines R_3 aufgefaßt werden, und der K_a besteht aus allen Geraden, welche diesen R_3, den Leitraum, schneidet. Wir nennen dann K_a „speziell“. Die Bedingung hierfür ist also

$$\underline{Q \equiv 0.} \tag{33}$$

Zwischen den 15 Koordinaten a'_{ik} eines R_3 (oder einer Geraden) bestehen also die 15 Gleichungen

$$\underline{a^2_{b'} a_{ik} = 0,} \tag{34}$$

von denen aber nur sechs unabhängig sind.

Ist $Q \equiv 0$, so ist natürlich auch $J = 0$. Der einem halbspeziellen $K_1^{(5)}$ zugeordnete Raumkomplex Q ist wegen (23) speziell, da dann $Q(Q) \equiv 0$ ist. Es ist also bei jedem halbspeziellen K_a eine Gerade, nämlich die Leitlinie von Q, vorhanden. Wir wollen sie die Brennachse des halbspeziellen $K_1^{(5)}$ nennen. Ihre Gleichung wird:

$$a_{b'}^2 a_{\pi'}^2 = 0 .$$

Sie schneidet einen beliebigen $R_4(v')$ in dem Punkt $a_{b'}^2 a_{v'} a_{u'} = 0$, also in dem Brennpunkt dieses R_4; daher der Name Brennachse.

Enthält ein $R_4(v')$ die Brennachse, so wird sein Brennpunkt unbestimmt, d. h. er schneidet den K_a nach einem speziellen $K_1^{(4)}$.

Man kommt zu diesem Resultat auch noch durch folgende Überlegung. Für $J = 0$ werden die sechs Gleichungen $a_{b'}^2 a_{v'} a_i = 0$ möglich und nach v' auflösbar. Da aber Δ bis auf einen Faktor mit J^4 identisch ist, so wird für $J = 0$ Δ vom Range zwei. Es gibt also nicht einen einzigen $R_4(v')$, der den sechs Gleichungen $a_{b'}^2 a_{v'} a_i = 0$ genügt, sondern ∞^3 solche. Je drei von diesen schneiden sich in einer Geraden, der Brennachse des halbspeziellen $K_1^{(5)}$.

Wegen $J = 0$ gehört diese Brennachse dem K_a selbst an.

Aus (31) folgt, daß ein zugeordneter Komplex nie halbspeziell sein kann; denn dann müßte K_a selbst halbspeziell sein und Q wäre speziell.

Jede Gerade, welche die Brennachse schneidet, gehört dem Komplexe an. Es gibt aber auch Komplexgerade, welche die Brennachse nicht schneiden.

4. Das Nullsystem eines $K_1^{(5)}$.

Gehört (xy) den K_a an, so wird

$$(35) \qquad \underline{R_y^{(4)} \equiv a'_x a'_y = 0 ,}$$

d. h. jedem Punkt y wird ein durch ihn gehender R_4, der zu y „konjugierte“ $R_y^{(4)}$ zugeordnet. Die Beziehung zwischen x und y in $a'_x a'_y = 0$ ist wechselseitig, d. h. liegt *x in $R_y^{(4)}$, so liegt* auch y in $R_x^{(4)}$.

Es sei z ein zweiter Punkt. $R_z^{(4)}$ schneidet $R_y^{(4)}$ in einem Raume R_3, dessen Gleichung wird, wenn $(zy) = p^2$ gesetzt wird:

$$(36) \qquad \underline{R_{p^2}^{(3)} \equiv a'_\pi a'_p b'_\pi b'_p = 0\,.}$$

Jeder Geraden ist so ein R_3 konjugiert.

$R_y^{(4)}$, $R_z^{(4)}$ und $R_t^{(4)}$ bestimmen die zur Ebene $p^3 = (y\,z\,t)$ konjugierte Ebene

$$(37) \qquad \underline{E_{p^3} \equiv a'_\pi b'_\pi c'_\pi a'_p b'_p c'_p = 0\,.}$$

Nehmen wir schließlich einen vierten Punkt s hinzu, so erhalten wir die zum $R_3(p^4 = (y\,z\,t\,s)$ konjugierte Gerade

$$(38) \qquad \underline{G_{p^4} \equiv a'_\pi b'_\pi c'_\pi d'_\pi a'_p b'_p c'_p d'_p = 0\,.}$$

Bei fünf Punkten erhalten wir die Gleichung des einem $R_4(v')$ konjugierten Punktes in der Form:

$$(39) \qquad \underline{P_{v'} \equiv (a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,u')\,(a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,v') = 0\,.}$$

Zu bemerken wäre hier, daß die Gleichungen (35) bis (39) auch für das Nullsystem eines $K_1^{(n)}$ gelten. Die Faktoren a'_π, ... sind dann Summen von $(n+1)$ Gliedern. Wir gehen jedoch hier nicht weiter darauf ein, sondern beschränken uns auf den R_5.

Wir beginnen mit Gleichung (35) und fragen uns, ob es Punkte y gibt, deren $R_y^{(4)}$ unbestimmt wird. Dann müssen die sechs Gleichungen

$$a'_y a'_i = 0$$

zusammen bestehen. Es muß also deren Determinante

$$(40) \qquad \underline{D = \frac{1}{6!}(a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f')^2}$$

verschwinden.

Nun wird nach der zu (26) dualen Identität:

$$6!\,D = \tfrac{5}{2}\,(a'^2 c'\,d'\,e'\,f')\,(b'^2 c'\,d'\,e'\,f')\,,$$

$$\tfrac{2}{5}\cdot 6!\,D = (c'\,d'\,a'^2\,e'\,f')\,(c'\,d'\,b'^2\,e'\,f')\,.$$

Dies gibt nach der zu (29) dualen Formel:

$$\tfrac{4}{5}\cdot 6!\,D = 3\,(c'^2 a'^2 e' f')\,(d'^2 b'^2 e' f') - (c' d' a'^2 e' f')\,(c' d' b'^2 e' f'),$$

$$\tfrac{2}{5}\,6!\,D = (c'^2 a'^2 e' f')\,(d'^2 b'^2 e' f'),$$

$$= (e' f' c'^2 a'^2)\,(e' f' d'^2 b'^2),$$

also nach (21):

$$= \tfrac{1}{6}\,(a'^2 c'^2 e'^2)\,(f'^2 d'^2 b'^2),$$

$$= \tfrac{4}{6}\,J^2,$$

somit

$$(41)\qquad \underline{D = \frac{1}{16\cdot 27}\,J^2.}$$

Es gibt also solche Punkte nur beim halbspeziellen Komplexe. D ist dann vom Range vier, es sind ∞^1 solche Punkte möglich, sie liegen alle auf der Brennachse.

Wir gehen zu Gleichung (36) über. Es wird

$$R^{(3)}_{p^2} = \tfrac{1}{24}\,(\pi'^4 a' b')\,a'_p b'_p,$$

$$= \tfrac{1}{24}\,(a' b' \pi'^4)\,a'_p b'_p.$$

Wir setzen in der Identität (1) für $n = 5 : 1 = 2 = a'$, $3 = b'$ und $4 = 5 = 6 = 7 = \pi'$, dann wird

$$(42)\qquad \underline{2(a' b' \pi'^4)\,a'_p = (a'^2 \pi'^4)\,b'_p + 4(a'^2 b' \pi'^3)\,\pi'_p,}$$

also kommt

$$2\cdot 24\,R^{(3)}_{p^2} = 24\,\pi^2_a\,p^2_{b'} + 4(a'^2 b' \pi'^3)\,\pi'_p b'_p.$$

Wir setzen ferner in (1) für $n = 5 : 1 = 2 = b'$, $3 = 4 = a'$, $5 = 6 = 7 = \pi'$, dann ist:

$$(43)\qquad \underline{2(b' a'^2 \pi'^3)\,b'_p = -2(b'^2 a' \pi'^3)\,a'_p + 3(b'^2 a'^2 \pi'^2)\,\pi'_p.}$$

Ist hier a' und b' vertauschbar, so wird

$$4(b' a'^2 \pi'^3)\,b'_p = 3(b'^2 a'^2 \pi'^2)\,\pi'_p$$

[vgl. (18)]. Es ist also der zweite Term rechts in $48\,R^{(3)}_{p^2}$:

$$4(a'^2 b' \pi'^3)\,\pi'_p b'_p = -3(b'^2 a'^2 \pi'^2)\,\pi'^2_p = -6\,a^2_{b'}\,a^2_{\pi'}\,p^2_{\pi'}$$

$$= -6\,p'^2_a\,p'^2_\pi\,a^2_{b'} = -6\,\pi'^2_\alpha\,\pi'^2_p.$$

Somit wird

$$(44)\qquad \underline{8\,R^{(3)}_{p^2} = 4\,\pi^2_{a'}\cdot p^2_{b'} - \pi'^2_\alpha\,\pi'^2_p.}$$

Hier ist $\pi_\alpha'^2 = 0$ der zugeordnete $K_3^{(5)}$. $R_{p^2}^{(3)}$ ist also als spezieller $K_1^{(5)}$ dargestellt als Komplex eines Büschels, welches durch den ursprünglichen K_a und den Komplex

$$\underline{\Omega \equiv \pi_\alpha'^2 \pi_p'^2} \tag{45}$$

bestimmt wird.

Jeder Geraden p^2 ist bezüglich des K_a ein solcher Komplex Ω zugeordnet. Jede Gerade von Ω bestimmt mit p^2 einen R_3, welcher dem zugeordneten Komplexe Q angehört; p^2 ist selbst in Ω enthalten.

Wir bilden nun $Q(\Omega)$ und $J(\Omega)$. Es ist:

$$Q(\Omega) = \tfrac{1}{4}(\pi^2 \alpha^2 p^2)(\pi^2 \beta^2 q^2),$$

dies gibt nach der zu (17) dualen Identität:

$$12\, Q(\Omega) = 2(\pi^3 \alpha p^2)(\pi \alpha \beta^2 q^2) + 2(\pi^3 \alpha^2 p)(\pi p \beta^2 q^2).$$

Hier formen wir weiter nach der zu (19) dualen Formel um und erhalten:

$$\begin{aligned} 24\, Q(\Omega) = {} & (\pi^4 p^2)(\alpha^2 \beta^2 q^2) + 2(\pi^4 \alpha p)(p \alpha \beta^2 q^2) \\ & + (\pi^4 \alpha^2)(p^2 \beta^2 q^2) + 2(\pi^4 p \alpha)(\alpha p \beta^2 q^2). \end{aligned}$$

Hier ist $(p^2 \beta^2 q^2) \equiv 0$, da die $p_{ik} = q_{ik}$ Koordinaten einer Geraden sind. Es bleibt also

$$24\, Q(\Omega) = 24\, \pi_p'^2 \cdot 2\, q_\alpha'^2 q_\beta'^2 + 4 \cdot 24\, \pi_\alpha' \pi_p' (p \alpha \beta^2 q^2).$$

Nun entsteht $q_\alpha'^2 q_\beta'^2$ aus $Q(Q)$, wenn wir die π' durch q' ersetzen. Es ist also nach (23)

$$Q(\Omega) = \tfrac{16}{3} \pi_p'^2 \cdot J \cdot q_{\alpha'}^2 - 4(p \alpha \beta^2 q^2)\, p_{\pi'} \alpha_{\pi'}.$$

Der 2. Teil rechts gibt nach der zu (20) dualen Identität:

$$\begin{aligned} -4(p \alpha \beta^2 q^2)\, p_{\pi'} \alpha_{\pi'} = {} & -2(p^2 \beta^2 q^2)\, \alpha_{\pi'}^2 - 4(p^2 \alpha \beta q^2)\, \beta_{\pi'} \alpha_{\pi'} \\ & -4(p^2 \alpha \beta^2 q)\, q_{\pi'} \alpha_{\pi'} - 8(p \alpha \beta^2 q^2)\, p_{\pi'} \alpha_{\pi'} = 0, \end{aligned}$$

also

$$\underline{Q(\Omega) = \tfrac{16}{3} \cdot J \cdot \pi_p'^2 q_{\alpha'}^2,} \tag{46}$$

d. h. der zu Ω zugeordnete Komplex ist speziell, und p^2 ist seine Leitlinie. Demzufolge ergibt sich, wie es auch sein muß

$$\underline{J(\Omega) = 0.} \tag{47}$$

Ω ist also selbst halbspeziell und p^2 wegen (46) die Brennachse.

Ist K_a halbspeziell, also $J = 0$, so wird $Q(\Omega) \equiv 0$, Ω ist also speziell und sein Leitraum ist nach (45) bestimmt durch p^2 und die Brennachse von K_a.

Ist K_a speziell, so wird Ω unbestimmt.

Stellt man die Forderung, daß p^2 seinen konjugierten $R_{p^2}^{(3)}$ schneidet, so ergibt (44)

$$(p_{a'}^2)^2 = 0\,,$$

d. h. p^2 gehört dem K_a an. Ist dies der Fall, so wird Ω speziell und $R_{p^2}^{(3)}$ sein Leitraum.

Wenn $R_{p^2}^{(3)}$ dem Raumkomplexe Q angehören soll, so muß nach (44)

$$J \cdot p_{a'}^2 = 0$$

sein, d. h. für $J \gtrless 0$ p^2 muß dem K_a angehören. Bildet man daher Q bezüglich K_a dual ab, so erhält man wieder K_a.

Wir gehen zu (37) über. Es wird

$$6\,E_{p^3} = (\pi'^3 a' b' c')\, a_p' b_p' c_p'\,.$$

Setzt man in (1) für $n = 5$: $1 = 2 = a'$, $3 = b'$, $4 = c'$, $5 = 6 = 7 = \pi'$, so wird:

$$2(a'b'c'\pi'^3)\,a_p' = (a'^2c'\pi'^3)\,b_p' - (a'^2b'\pi'^3)\,c_p' + 3(a'^2b'c'\pi'^2)\,\pi_p'. \tag{48}$$

Dann kommt

$$\begin{aligned}
-12\,E_{p^3} &= 2(a'^2c'\pi'^3)\,b_p'^2 c_p' + 3(a'^2b'c'\pi'^2)\,\pi_p' b_p' c_p'\\
&= 2A + 3B\,,\\
A &= (c'a'^2\pi'^3)\,c_p' b_p'^2\,,
\end{aligned}$$

dies gibt nach (43):

$$A = \tfrac{3}{4}(c'^2a'^2\pi'^2)\,\pi_p' b_p'^2\,.$$

Ferner wird:

$$B = (b'c'a'^2\pi'^2)\,b_p' c_p' \pi_p'\,,$$

also nach (20):

$$\begin{aligned}
4B &= (b'^2a'^2\pi'^2)\,c_p'^2\pi_p' + 2(b'^2c'a'^2\pi')\,\pi_p' c_p' \pi_p'\,,\\
4B &= \tfrac{4}{3}A - 2(c'b'^2a'^2\pi')\,c_p'\pi_p'^2\,,
\end{aligned}$$

dies gibt nach (21):

$$\begin{aligned}
&= \tfrac{4}{3}A - \tfrac{1}{3}(c'^2b'^2a'^2)\,\pi_p'^3\,,\\
&= \tfrac{4}{3}A - \tfrac{2}{3}J\cdot\pi_p'^3\,.
\end{aligned}$$

Somit kommt:
$$-12\,E_{p^3} = 3\,A - \tfrac{1}{2}\,J\,\pi_p'^3$$
oder

(49) $$\underline{24\,E_{p^3} = -6\,(a'^2\,b'^2\,\pi'^2)\,c_p'^2\,\pi_p' + J\cdot\pi_p'^3\,.}$$

Die zu einer Ebene p^3 konjugierte Ebene ist also hier durch einen $K_2^{(5)}$ dargestellt, welcher einem Büschel angehört, das durch p^3 und den Komplex

(50) $$\underline{\Gamma \equiv (a'^2\,b'^2\,\pi'^2)\,c_p'^2\,\pi_p' = 0}$$

bestimmt ist. Γ läßt noch eine andere Schreibart zu. Das Zentrum der Ebene p^3 ist nach (13) $p_{a'}^2\,p_{u'} = 0$; sind ξ_i seine Koordinaten, so wird auch
$$\Gamma = (a'^2\,b'^2\,\pi'^2)\,\pi_\xi' = 2\,a_{b'}^2\,a_{\pi'}^2\,\pi_\xi' = 2\,\pi_\alpha'^2\,\pi_\xi'\,,$$

(51) $$\underline{\Gamma = 2\,\pi_\alpha'^2\,\pi_\xi'\,.}$$

Jede Ebene von Γ gibt also mit dem Zentrum ξ von p^3 verbunden einen R_3, welcher Q angehört. Dies ist die geometrische Bedeutung von $\Gamma = 0$.

Wir kommen auf diese Verhältnisse genauer zurück, wenn wir den Ebenenkomplex im R_5 behandeln. Man kann leicht zeigen, daß (50) für $\pi = p$ identisch verschwinde. Es schneidet also jede Ebene ihre konjugierte. Der Schnittpunkt ist, wie sich ebenfalls leicht beweisen läßt, das Zentrum der Ebene p^3.

Nach (38) entspricht jedem $R_3(p^4)$ eine konjugierte Gerade. Es ist
$$2\,G_{p^4} = (\pi'^2\,a'b'c'd')\,a_p'\,b_p'\,c_p'\,d_p'\,,$$
$$= (a'b'c'd'\,\pi'^2)\,a_p'\,b_p'\,c_p'\,d_p'\,,$$
dies gibt nach der zu (29) dualen Identität:
$$4\,G_{p^4} = 3\,(a'^2\,c'd'\,\pi'^2)\,b_p'^2\,c_p'\,d_p' + 2\,(a'^2\,b'c'd'\,\pi')\,\pi_p'\,b_p'\,c_p'\,d_p'\,,$$
$$= 3\,A + 2\,B\,.$$
$$A = (c'd'a'^2\,\pi'^2)\,c_p'\,b_p'^2\,d_p'$$
gibt nach (20):
$$4\,A = (c'^2\,a'^2\,\pi'^2)\,b_p'^2\,d_p'^2 + 2\,(c'^2\,d'a'^2\,\pi')\,\pi_p'\,b_p'^2\,d_p'\,,$$
$$A = \tfrac{1}{2}\,\pi_\alpha'^2\cdot p_{a'}^2\,p_{b'}^2 - \tfrac{1}{2}\,(d'a'^2\,c'^2\,\pi')\,d_p'\,\pi_p'\,b_p'^2\,,$$
$$= M - \tfrac{1}{2}\,C\,,$$

nun wird C nach (20):

$$C = \tfrac{1}{3} J \cdot \pi_p'^2 b_p'^2 = \tfrac{1}{3} J \cdot V \, ,$$

wobei

(52) $$\underline{V = p_{\pi'}^2 p_{a'}^2 = 0}$$

einen jedem $R_{p^4}^{(3)}$ zugeordneten $K_3^{(5)}$ darstellt. Jeder R_3 von V schneidet p^3 nach einer dem K_a angehörigen Geraden. Wir haben also

$$A = M - \tfrac{1}{6} J \cdot V \, .$$

Ferner wird:

$$-B = (b'c'd'\pi'a'^2) \, b_p' c_p' d_p' \pi_p' \, ,$$

dies gibt nach der zu (29) dualen Formel:

$$-4B = 2(b'^2 a'^2 d'\pi') \, c_p'^2 d_p' \pi_p' + (b'^2 c' a'^2 d') \, c_p' d_p' \pi_p'^2 \, ,$$

$$B = -\tfrac{1}{2} D - \tfrac{1}{4} E \, ,$$

$$D = (d'a'^2 b'^2 \pi') \, d_p' c_p'^2 \pi_p'$$

gibt nach (21):

$$D = \tfrac{1}{6}(d'^2 a'^2 b'^2) \, c_p'^2 \pi_p'^2 \, ,$$

$$= \tfrac{1}{8} J \cdot V \, .$$

Ferner wird nach (21):

$$E = (c'd'b'^2 a'^2) \, c_p' d_p' \pi_p'^2 \, ,$$

$$= \tfrac{1}{6}(c'^2 b'^2 a'^2) \, d_p'^2 \pi_p'^2 \, ,$$

$$= \tfrac{1}{3} J \cdot V \, .$$

Somit wird schließlich:

$$B = -\tfrac{1}{4} J \cdot V \, ,$$

(53) $$\underline{4\, G_{p^4} \equiv \tfrac{3}{2} Q \cdot p_\alpha'^2 - J \cdot V \, .}$$

Es erscheint also auch G_{p^4} als $K_3^{(5)}$ eines Büschels, welches von Q und V bestimmt wird.

Wir bestimmen nun $Q(V)$ und $J(V)$. Es wird $Q(V) = \tfrac{1}{4}(p'^2 \pi'^2 a'^2)(q'^2 \pi'^2 b'^2)$, dies gibt nach der bei $Q(\Omega)$ angeführten Umformung [vgl. (46)]:

(54) $$\underline{Q(V) = \pi_{p'}^2 \cdot q_{a'}^2 q_{b'}^2 \, .}$$

Dann wird ferner:

(55) $$\underline{J(V) \equiv 0 \, .}$$

Es ist somit V immer halbspeziell. Sein Brennraum (d. i. das zur Brennachse duale Gebilde) ist der $R_3(p^4)$ nach (59). V wird speziell, wenn p^4 dem Komplexe Q angehört.

Wenn G_{p^4} den Raum p^4 schneiden soll, so muß nach (53) (für $\pi = p$) der $R_3(p^4)$ dem Komplexe Q angehören.

Soll G_{p^4} eine Gerade von K_a sein, so besteht nach (53) die Gleichung $J \cdot Q = 0$, d. h. p^4 gehört Q an. Bildet man daher K_a bezüglich K_a selbst dual ab, so erhält man den Komplex Q.

Bezüglich Q ist zu einer Geraden p^2 ein R_3 konjugiert; dessen Gleichung wird nach der zu (53) dualen Formel

$$\underline{R_{p^2}'^{(3)} \equiv \tfrac{8}{3} J^2(\pi_{a'}^2 \cdot p_{a'}^2 - \tfrac{1}{4}\Omega) = 0\,.} \tag{56}$$

Ferner erhält man die zu einem $R_3(p^4)$ bezüglich Q konjugierte Gerade nach der zu (44) dualen Gleichung:

$$\underline{G_{p^4}' \equiv \frac{Q}{2} \cdot Q_{p^4} - \tfrac{1}{3} J \cdot V = 0\,.} \tag{57}$$

Man wird also hier auf keine neuen Formen geführt.

Wir kommen schließlich auf den zu einem $R_4(v')$ konjugierten Punkt; dessen Gleichung nach (39) ist:

$$P_{v'} \equiv (a'b'c'd'e'u')\,(a'b'c'd'e'v') = 0\,.$$

Wenn $\Delta = (a'b'c'd'e'f')^2$ ist, so wird auch

$$P_{v'} = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 \Delta}{\partial f_i' f_k'} u_i' v_k'\,.$$

Nun ist nach (40) und (41)

$$\Delta = 6!\,D = \frac{6!}{16 \cdot 27} J^2\,,$$

also kommt

$$P_{v'} \equiv \frac{6!}{16 \cdot 27} J \cdot a_{b'}^2\, a_{u'}\, a_{v'}\,,$$

d. h. $P_{v'}$ ist mit dem Brennpunkte von v' identisch.

5. Die Ebene im R_5.

Wir nehmen die Gleichung eines $K_2^{(5)}$ in der Form

$$\underline{K_{\pi' a} \equiv \pi_a'^3 = 0} \tag{58}$$

an.

Es ist dies die allgemeinste, lineare Gleichung zwischen Ebenenkoordinaten und stellt ein lineares System von ∞^9 Ebenen dar. Nach Abschnitt IV, Gleichungen (5) und (5a) wird auch

$$\underline{K_{\pi' a} = -K_{\pi a'}\,.} \tag{59}$$

Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned}\pi_a'^3 &= \tfrac{1}{6}(\pi^3 a^3) = 6\,\Sigma\,\pi'_{ikl}\,a_{ikl}\,,\\ &= 6\,\Sigma\,a_{ikl}\,\pi'_{ikl} = 6\,\Sigma\,\varphi_{ikl}\,a'_{i'k'l'}\,\pi'_{ikl}\,,\\ &= \tfrac{1}{6}(a'^3\,\pi'^3)\,,\end{aligned}$$

also

$$\underline{(\pi^3 a^3) = -(\pi'^3 a'^3)\,.} \tag{60}$$

Die Gleichung der Ebene p^3 ist:

$$\underline{\pi_p'^3 = -\pi_{p'}^3 = 0\,,} \tag{61}$$

sie wird von einer anderen Ebene q^3 geschnitten, wenn $p_{q'}^3 = 0$ ist.

Als Gleichung des $R_3(y\,p^3)$ erhält man

$$R_3 \equiv \tfrac{1}{6}(\pi^2\,y\,p^3) = -\tfrac{1}{6}(p^3\,\pi^2\,y) = -p_\pi'^2\,p_y' = 0\,,$$

oder in gestrichenen Variabeln, da

$$\begin{aligned}24\,p_\pi'^2\,p_y' &= (p'^2\,\pi'^4)\,p_y' = -32(p'^3\,\pi'^3)\,\pi_y'\,,\\ -3\,p_\pi'^2\,p_y' &= 4(p'^3\,\pi'^3)\,\pi_y' = 24\,p_{\pi'}^3\,\pi_y'\,,\end{aligned}$$

$$\underline{R_3 \equiv -p_\pi'^2\,p_y' \equiv 8\,\pi_p'^3\,\pi_y' = 0\,.} \tag{62}$$

Die Gleichung des durch p^3 und die Gerade q^2 bestimmten R_4 erhält man, da $(x\,q^2)$ die Ebene p^3 schneiden muß, in der Form:

$$R_4 = \tfrac{1}{6}(x\,q^2\,p^3) = -p_q'^2\,p_x' = -(p'^2\,q'^4)\,p_x' = \tfrac{4}{3}(p'^3\,q'^3)\,q_x'\,,$$

also

(63) $$\underline{R_4 \equiv -p_{q}'^{2} p_x' \equiv 8 p_{q'}^3 q_x' = 0\,.}$$

Die zu (62) und (63) dualen Gleichungen ergeben: Die Schnittgerade R_1 von p^3 mit dem $R_4(v')$:

(64) $$\underline{R_1 \equiv +p_{\pi'}^2 p_{v'} \equiv -8 \pi_{p'}^3 \pi_{v'} = 0}$$

und der Schnittpunkt R_0 des $R_3(q'^2)$ mit p^3:

(65) $$\underline{R_0 \equiv p_{q'}^2 p_{u'} \equiv -8 p_q'^3 q_{u'} = 0\,.}$$

Es seien zwei Punkte y und z gegeben. Sie geben mit p^3 verbunden die beiden Räume R_3, R_y und R_z mit den Gleichungen

$$R_y \equiv -p_\pi'^2 p_y' \equiv 8 \pi_p'^3 \pi_y' = 0\,,$$

$$R_z \equiv -p_\pi'^2 p_z' \equiv 8 \pi_p'^3 \pi_z' = 0\,.$$

Zwei R_3 schneiden sich im allgemeinen in einer Geraden; sind σ'^2 und ϱ'^2 die beiden R_3, so wird deren Gleichung
$$G \equiv (\pi'^2 \sigma'^2 \varrho'^2) = 0\,.$$

Wenden wir dies auf R_y und R_z an, so muß G identisch verschwinden, da sich R_y und R_z in p^3 schneiden. Es ist nun:

$$G \equiv (p'^2 q'^2 \pi'^2) p_y' q_z'\,,$$

$$3\,G = -2(p'^3 q' \pi'^2) q_y' q_z' - 2(p'^3 q'^2 \pi') \pi_y' q_z'\,,$$

$$3\,G = -2\,G_1 - 2\,G_2\,,$$

wobei

$$G_1 = (p'^3 q' \pi'^2) q_y' q_z' = (q' p'^3 \pi'^2) q_z' q_y'\,,$$

$$2\,G_1 = 3(q'^2 p'^2 \pi'^2) p_z' q_y' + 2(q'^2 p'^3 \pi') \pi_z' q_y'\,,$$

$$2\,G_1 = 3\,G + 2\,G_3\,,$$

also wird

$$3\,G = -G_2 - G_3 = -6\,p_{q'}^2 p_{\pi'} \pi_y' q_z' - 6\,p_{q'}^2 p_{\pi'} \pi_z' q_y'\,,$$

$$G = -2\,p_{q'}^2 p_{\pi'} \pi_y' q_z' - 2\,p_{q'}^2 p_{\pi'} \pi_z' q_y'\,.$$

Wir führen nun der Einfachheit halber ein neues Symbol α ein, welches man als zweifältig-gemischt bezeichnen könnte. Wir setzen nämlich:

(66) $$\underline{p_{q'}^2 p_i q_k' = \alpha_i \alpha_k'\,.}$$

Es muß also immer ein α und ein α' gleichzeitig auftreten. Sonst sind α und α' wie gewöhnliche Symbole zu behandeln. Es ist insbesondere

(67) $$\underline{\alpha_{\alpha'} = p^3_{q'} \equiv 0\,.}$$

Diese Gleichung gilt auch noch dann, wenn die p_{ikl} nicht Koordinaten einer Ebene sind. Denn es ist $a^3_{b'} = -b^3_{a'} = -a^3_{b'} = 0$, wie durch Vertauschung von a und b folgt.

Wir erhalten nun durch Einführung der α:

(68) $$\underline{G = -2\,\alpha_{\pi'}\,\pi'_y\,\alpha'_z - 2\,\alpha_{\pi'}\,\pi'_z\,\alpha'_y\,.}$$

Da dies $\equiv 0$ sein soll, so folgt $\alpha_i\,\alpha'_k \equiv 0$ oder

(69) $$\underline{H \equiv \alpha_{u'}\,\alpha'_x \equiv 0\,,}$$

d. h. ist durch $\pi'^3_p = 0$ eine Ebene dargestellt, so verschwindet die Zwischenform $H = \alpha_{u'}\,\alpha'_x$ identisch.

Auf dieses Resultat wird man auch noch folgend geführt. Es ist nach (62) $R_y = \pi^2_{p'}\,p'_y = 0$ die Gleichung des $R_3(p^3\,y)$. $\pi^2_{p'}\,p'_y = 0$ stellt also einen speziellen Geradenkomplex $K^{(5)}_1 \equiv K_y$ dar; dessen Form Q_y verschwindet somit identisch. Nun ist nach (16)

$$Q_y = (\pi'^2\,p'^2\,q'^2)\,p'_y\,q'_y\,,$$

also nach (68) für $y = z$

$$Q_y = -4\,\alpha_{\pi'}\,\pi'_y\,\alpha'_y\,;$$

setzen wir hier für $\pi'_i\,\pi'_y$ u'_i und schreiben x statt z, so wird

$$Q_y = -4\,\alpha_{u'}\,\alpha'_x \equiv 0\,.$$

Für einen allgemeinen $K^{(5)}_2$ ist H von Null verschieden. Wir nennen eine Ebene einen speziellen $K^{(5)}_2$ und sagen demgemäß, daß für einen speziellen $K^{(5)}_2$ die Form H identisch verschwindet. Man kann aber auch zeigen, daß die Bedingung

$$H \equiv 0$$

hinreichend ist, damit ein $K^{(5)}_2$ speziell ist.

Es sei $K^{(5)}_2 \equiv \pi'^3_a = 0$. Jedem Punkte y ist dann ein $K^{(5)}_1$

(70) $$\underline{K_y \equiv \pi^2_{a'}\,a'_y = 0}$$

zugeordnet als Ort derjenigen Geraden π^2, welche mit y verbunden eine Ebene des $K_2^{(5)} = K_a$ geben. Die Form Q dieses K_y wird

$$Q_y = (\pi'^2\, a'^2\, b'^2)\, a'_y\, b'_y$$

oder nach (68) für $y = z$ auch

$$\underline{Q_y = \pi'_y\, \pi'_\alpha\, \alpha'_y = 0\,.} \tag{71}$$

Ist $\alpha_i\, \alpha'_k = 0$, so wird $Q_y \equiv 0$, K_y ist speziell und stellt einen Raum

$$R_y \equiv \pi^2_{\alpha'}\, a'_y = 0$$

dar. Dual entspricht jedem $R_4(v')$ ein Raumkomplex $K_3^{(5)}$

$$\underline{K_{v'} \equiv \pi'^2_a\, a_{v'} = 0\,.} \tag{72}$$

Jeder R_3 dieses $K_{v'}$ schneidet v' nach einer Ebene des Komplexes K_a. Die Form Q des $K_{v'}$ wird wie oben

$$\underline{Q_{v'} \equiv \pi_{v'}\, \pi_{\alpha'}\, \alpha_{v'} = 0\,.} \tag{73}$$

$Q_{v'}$ ist für $H \equiv 0$ ebenfalls identisch Null, $K_{v'}$ also speziell und stellt eine Gerade

$$G_{v'} \equiv \pi'^2_a\, a_{v'} = 0$$

dar, was wir vorläufig festhalten.

Jedem $R_3(p'^2)$ ist bezüglich des K_a ein Punkt

$$\underline{P_{p'^2} \equiv p'^2_a\, a_{u'} = 0} \tag{74}$$

zugeordnet; durch ihn gehen alle Ebenen des K_a die in p'^2 enthalten sind.

Wir verbinden nun $P_{p'^2}$ mit $G_{v'}$ zu einer Ebene E; deren Gleichung wird

$$E = (\pi^3\, a^2\, b)\, a_{v'}\, p'^2_b = 0$$

$$= (a^2\, \pi^3\, b)\, a_{v'}\, p'^2_b\,,$$

oder umgeformt

$$3\,E = 3\,(a^3\, \pi^2\, b)\, \pi_{v'}\, p'^2_b - (a^3\, \pi^3)\, b_{v'}\, p'^2_b\,.$$

Der erste Term rechts enthält a'_b als Faktor und demgemäß, wie wir gleich zeigen werden, auch $\alpha_{\alpha'}$, verschwindet somit nach Voraussetzung. Es wird also

$$E = 2\,\pi'^3_{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{b}_{v'}\, \mathfrak{p}'^2_{\mathfrak{b}}\,,$$

und da $p_{v'} p_b'^2$ von Null verschieden vorausgesetzt werden darf, da v' und p'^2 ganz willkürlich sind, so wird

$$\pi_a'^3 = 0$$

die Gleichung einer Ebene, w. z. b. w.

Wir haben also den Satz:

„Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß $\pi_a'^3 = 0$ eine Ebene darstellt, ist

$$H \equiv \alpha_{u'} \alpha_x' \equiv 0 .“$$

Damit also die a_{ikl} als Koordinaten einer Ebene aufgefaßt werden können, müssen die 15, in den a_{ikl} quadratischen Gleichungen

$$\underline{a_{b'}^2 a_i b_k' = 0} \tag{75}$$

bestehen; von diesen sind aber nur zehn voneinander unabhängig, da es nur ∞^9 Ebenen im R_5 gibt.

Wir haben nun noch den Satz zu beweisen:

„Enthält ein Ausdruck den symbolischen Faktor $a_{b'}$, so enthält er α und α' oder verschwindet.“

Es sei M der vorgelegte Ausdruck, $a_{v'}$, $a_{w'}$ die weiteren Glieder mit a, b_y', b_z' diejenigen mit b', so daß also gesetzt werden kann

$$M = a_{b'} a_{v'} a_{w'} b_y' b_z' M' ,$$

wo M' die Symbole a und b nicht mehr enthält.

Ist v' oder $w' = b'$, so enthält M den Faktor $a_{b'}^2$, man kann also α und α' sofort einführen; ebenso wenn y oder $z = a$ ist.

Es wird nun:

$$6 M = (a'^3 b' v' w') b_y' b_z' M' ,$$

$$-6 M = (b' a'^3 v' w') b_y' b_z' M' ,$$

$$-12 M = 3 (b'^2 a'^2 v' w') a_y' b_z' M' - (b'^2 a'^3 w') v_y' b_z' M' + (b'^2 a'^3 v') w_y' b_z' M' ,$$

$$-12 M = 3 M_1 - M_2 + M_3 ,$$

wobei

$$3 M_1 = -2 (b'^3 a' v' w') a_z' a_y' M' + (b'^3 a'^2 w') v_z' a_y' M' + (b'^3 a'^2 v') w_z' a_y' M' ,$$

$$3 M_1 = -2 M_4 + M_5 - M_6 ,$$

$$M_4 = (b'^3 a' v' w') a_z' a_y' M' = -(a'^3 b' v' w') b_y' b_z' M' = -6 M ;$$

somit
$$3\,M_1 = 12\,M + M_5 - M_6$$
und schließlich
$$24\,M = M_2 - M_3 - M_5 + M_6\,,$$
also

(76) $$\underline{4\,a_{b'}a_{v'}a_{w'}b_y'b_z'M' = (\alpha_{w'}\alpha_z'v_y' - \alpha_{v'}\alpha_z'w_y' - \alpha_{w'}\alpha_y'v_z' + \alpha_{v'}\alpha_y'w_z')\,M'.}$$

Hieraus wird dann noch für $v' = w' = p'$:

(77) $$\underline{2\,a_{b'}\,a_{p'}^2\,b_y'\,b_z'\,M' = (\alpha_{p'}\,\alpha_y'\,p_z' - \alpha_{p'}\,\alpha_z'\,p_y')\,M'\,.}$$

Ferner für $y = z = q$ in (76):

(77 a) $$\underline{2\,a_{b'}\,a_{v'}\,a_{w'}\,b_q'^2\,M' = (\alpha_{v'}\,\alpha_q'\,q_{w'} - \alpha_{w'}\,\alpha_q'\,q_{v'})\,M'\,.}$$

Ist hier schließlich noch $v' = w' = p'$, so wird

(78) $$\underline{a_{b'}\,a_{p'}^2\,b_q'^2\,M' = \alpha_{p'}\,\alpha_q'\,q_{p'}\,M'\,.}$$

Sind p^3 Koordinaten einer Ebene, so verschwindet jeder Ausdruck, der $p_{q'}$ enthält. Ebenso verschwindet jeder Ausdruck mit den Faktoren $(p^3\,q\,x\,y)$, $(p'^3\,q'\,v'\,w')$, $(p^3\,q^2\,x\,y)$, $(p'^3\,q'^2\,u'\,v')$ und $(p^2\,q^2\,x\,y)$, $(p'^2\,q'^2\,u'\,v')$; letztere Faktoren lassen sich unmittelbar auf erstere zurückführen.

6. Die ebenen Schnitte eines $K_2^{(5)}$.

Es sei ein $R_3(p^4)$ durch die vier Punkte x, y, z und t gegeben, welche wir der Reihe nach mit P_1, P_2, P_3, P_4 bezeichnen wollen. Sind
$$\xi_i = \sum_k \lambda_k\,x_i\,,$$
$$\eta_i = \sum_k \mu_k\,x_i\,,$$
$$\zeta_i = \sum_k \nu_k\,x_i$$
drei Punkte des $R_3(p^4)$, so werden die fünfdimensionalen Koordinaten der Ebene $\pi^3 = (\xi\,\eta\,\zeta)$:
$$\pi_{ikl} = (\xi\,\eta\,\zeta)_{ikl} = \sum_{1,4} (\lambda\,\mu\,\nu)_{rst}(P_r\,P_s\,P_t)_{ikl}\,,$$
wo sich die Indizes r, s, t von 1 bis 4 bewegen.

π^3 gehört dem K_a an, wenn

$$(79) \qquad \underline{\sum_{1,4} \varrho_{rst}\, a'_{P_r}\, a'_{P_s}\, a'_{P_t} = 0\,.}$$

Die ϱ_{rst} sind hierbei die dreidimensionalen Koordinaten der Ebene π^3 im $R_3(p^4)$, können also durch einen Buchstaben $\sigma_\theta = \varrho_{rst}$ ersetzt werden, wo $\theta \# (r\,s\,t)$ in den Zahlen 1 bis 4 ist.

Aus (79) folgt also, daß alle Ebenen eines $K_2^{(5)}$, die in einem R_3 liegen, durch einen Punkt gehen. Diesen Punkt nennen wir das Zentrum des $R_3(p^4)$. Seine dreidimensionalen Koordinaten sind nach (79)

$$\lambda_\theta = a'_{P_r}\, a'_{P_s}\, a'_{P_t}\,,$$

somit wird seine Gleichung im R_5:

$$\Sigma\, u'_{P_\theta}\, a'_{P_r}\, a'_{P_s}\, a'_{P_t} = 0$$

oder

$$(a'^3\, u'\, p'^2) = 0\,,$$

d. i.

$$(80) \qquad \underline{a^2_{p'}\, a_{u'} = 0}$$

oder auch

$$(80\text{a}) \qquad \underline{a'^3_p\, p_{u'} = 0\,.}$$

Wir nehmen nun noch einen weiteren Punkt $s = P_5$ hinzu, so daß jetzt ein $R_4(v' = (x\,y\,z\,t\,s))$ gegeben ist und suchen den Schnitt von v' mit dem K_a. Eine Ebene π^3 in v' hat wieder die Koordinaten

$$\pi_{ikl} = (\xi\,\eta\,\zeta)_{ikl} = \sum_{1,5} (\lambda\,\mu\,\nu)_{\alpha\beta\gamma} (P_\alpha\, P_\beta\, P_\gamma)_{ikl}\,.$$

Sie gehört dem K_a an, wenn:

$$(81) \qquad \underline{\sum_{1,5} \omega_{\alpha\beta\gamma}\, a'_{P_\alpha}\, a'_{P_\beta}\, a'_{P_\gamma} = 0\,.}$$

Hier sind die $\omega_{\alpha\beta\gamma}$ vierdimensionale Ebenenkoordinaten. Die Ebenen des K_a in v' bilden somit einen $K_2^{(4)}$, dessen Brennraum wir jetzt bestimmen. Ist $\omega^3_{m'} = 0$ die Gleichung des $K_2^{(4)}$, also $m'_{\alpha\beta\gamma} = a'_{P_\alpha}\, a'_{P_\beta}\, a'_{P_\gamma}$ seine Koordinaten, so sind die vierdimensionalen Koordinaten S'_i des *Brennraumes:*

$$S'_i = 2\,\Sigma\, m'_{\alpha\beta i}\, m'_{\gamma\delta i}\,,$$

$$= 2\,\Sigma\, a'_{P_\alpha} a'_{P_\beta} a'_{P_i} b'_{P_\gamma} b'_{P_\delta} b'_{P_i}\,,$$

$$S'_i = \tfrac{1}{6}\,(a'^3\, b'^2\, v')\, b'_{P_i}\,.$$

Ist nun in einem $R_4(v')$ ein $R_3(S')$ gegeben, wo die S' vierdimensionale Raumkoordinaten sind, so wird seine Gleichung im fünfdimensionalen Raume

$$\sum_{1,5} S'_\alpha\, \pi'_{P_\beta}\, \pi'_{P_\gamma}\, \pi'_{P_\delta}\, \pi'_{P_\varepsilon} = 0\,.$$

Man erhält also für den Brennraum:

$$\sum_{1,5} (a'^3\, b'^2\, v')\, b'_{P_\alpha}\, \pi'_{P_\beta}\, \pi'_{P_\gamma}\, \pi'_{P_\delta}\, \pi'_{P_\varepsilon} = 0$$

oder

$$a^2_{b'}\, a_{v'}\, (b'\, v'\, \pi'^4) = 0\,,$$

d. i.

(82) $$\underline{R_3(v') \equiv \pi_{v'}\, \pi_{\alpha'}\, \alpha_{v'} = 0\,.}$$

Wir wollen diesen $R_3(v')$ kurz den „singulären“ R_3 in v' nennen. Jede Ebene in ihm gehört dem K_a an. Die Frage, ob es $R_4(v')$ gibt, welche K_a nach einem speziellen $K_2^{(4)}$ schneiden, werden wir später in bejahendem Sinne beantworten. Für einen solchen $R_4(v')$ wird dann der singuläre R_3 unbestimmt.

Dual gibt es durch jeden Punkt y eine „singuläre“ Gerade

$$Q_y = \pi'_y\, \pi'_\alpha\, \alpha'_y = 0\,,$$

deren Gleichung also schon durch (71) gegeben wurde. Tatsächlich wird die dort definierte Form Q_y des Komplexes K_y ein spezieller Komplex, d. h. K_y ist immer halbspeziell. Die Invariante J von K_y ist nämlich nach (24) mit $(a^3 y\, y\, \alpha)\, \alpha'_y$, also mit Null identisch.

Jede Ebene, welche die singuläre Gerade von y enthält, gehört dem K_a an.

7. Die Gegenverwandtschaft.

Jedem Punkte y entspricht ein $K_1^{(5)}$

$$K_y \equiv \pi^2_{\alpha'}\, a'_y = 0\,,$$

dessen Geraden, mit y verbunden, Ebenen erzeugen, welche dem K_a angehören. Dieser K_y ist halbspeziell und

$$Q_y = \pi'_y\, \pi'_\alpha\, \alpha'_y = 0$$

ist seine Brennlinie. Diese ist somit mit der durch y gehenden singulären Geraden identisch. Q_y hat die Koordinaten $(\alpha\, y)_{ik}\, \alpha'_y$, verbindet also y mit dem Punkte

$$\underline{\Gamma_y \equiv \alpha_{u'}\, \alpha'_y = 0\,,} \tag{83}$$

welchen wir den „Gegenpunkt" Γ_y von y nennen wollen. Es wird so durch den K_a jedem Punkte y sein Gegenpunkt Γ_y zugeordnet. Die Gerade $(y\, \Gamma_y)$ ist die zu y singuläre Gerade.

Dual entspricht jedem $R_4(v')$ sein „Gegenraum" $\Gamma_{v'}$, dessen Gleichung

$$\underline{\Gamma_{v'} \equiv \alpha'_x\, \alpha_{v'} = 0} \tag{84}$$

wird. Er schneidet v' nach dem singulären $R_3(v')$.

Die so durch den K_a im R_5 hervorgerufene Kollineation nennen wir Gegenverwandtschaft; sie ist, wie wir sehen werden, ein-eindeutig und umkehrbar.

Bewegt sich y auf einer Geraden p^2, so beschreibt Γ_y die Gegengerade

$$\underline{G_{p^2} \equiv \pi'_\alpha\, \pi'_\beta\, p_{\alpha'}\, p_{\beta'} = 0\,.} \tag{85}$$

Ebenso wird jeder Ebene p^3 ihre Gegenebene

$$\underline{G_{p^3} \equiv \pi'_\alpha\, \pi'_\beta\, \pi'_\gamma\, p_{\alpha'}\, p_{\beta'}\, p_{\gamma'} = 0\,,} \tag{86}$$

jedem $R_3(p^4)$ sein Gegen-R_3:

$$\underline{G_{p^4} \equiv \pi'_\alpha\, \pi'_\beta\, \pi'_\gamma\, \pi'_\delta\, p_{\alpha'}\, p_{\beta'}\, p_{\gamma'}\, p_{\delta'} = 0} \tag{87}$$

und schließlich jedem $R_4(p^5 = v')$ ein R_4

$$\pi'_\alpha\, \pi'_\beta\, \pi'_\gamma\, \pi'_\delta\, \pi'_\varepsilon\, p_{\alpha'}\, p_{\beta'}\, p_{\gamma'}\, p_{\delta'}\, p_{\varepsilon'} = 0$$

oder

$$\underline{(x\, \alpha\, \beta\, \gamma\, \delta\, \varepsilon)\, (v'\, \alpha'\, \beta'\, \gamma'\, \delta'\, \varepsilon') = 0} \tag{84a}$$

zugeordnet. Wir werden sehen, daß (84a) mit (84) identisch ist. Man kann überhaupt statt von (83) auch von (84) ausgehen und (85), (86) und (87) ableiten.

Wir fragen uns nun, ob die Gegenverwandtschaft umkehrbar ist, d. h. ob der Gegenpunkt $\Gamma\Gamma_y$ von Γ_y *wieder auf y führt.* Es ist

$$\Gamma\Gamma_y = \alpha_{\beta'}\beta_{u'}\alpha'_y\,,$$
$$= a^2_{b'}a_{c'}b'_y d_{u'} d^2_{c'}\,,$$
$$6\,\Gamma\Gamma_y = (d'^3c'^2u')\,b'_y c'_a b'^2_a\,,$$
$$= 3(b'd'^2c'^2u')\,d'_y c'_y b'^2_a + 2(b'd'^3c'u')\,c'_y c'_a b'^2_a - (b'd'^3c'^2)\,u'_y c'_a b'^2_a\,,$$
$$6\,\Gamma\Gamma_y = 3\,B_1 + 2\,B_2 - B_3\,,$$
$$B_1 = (b'd'^2c'^2u')\,d'_y c'_a b'^2_a = (c'^2b'd'^2u')\,c'_a d'_y b'^2_a\,,$$
$$3\,B_1 = (c'^3d'^2u')\,b'^3_a + 2(c'^3b'd'u')\,d'_a d'_y b'^2_a - (c'^3b'd'^2)\,u'_a d'_y b'^2_a\,,$$
$$3\,B_1 = C_1 + 2\,C_2 - C_3\,.$$

Hier enthält C_1 den Faktor b'^3_a, also $C_1 = 0$; aus C_2 entsteht durch Vertauschung von c und d die Form B_2. C_3 ist mit $6\,\Gamma\Gamma_y$ identisch. Es wird also

$$3\,B_1 = 2\,B_2 - 6\,\Gamma\Gamma_y$$

und

$$12\,\Gamma\Gamma_y = 4\,B_2 - B_3\,.$$

Ferner gibt B_2 umgeformt:

$$B_2 = -(c'b'd'^3u') = (b'c'd'^3u')\,b'_a b'_a c'_a c'_y\,,$$
$$2\,B_2 = (b'^2d'^3u')\;c'_a c'_b c'_a c'_y - 3(b'^2c'd'^2u')\,d'_a b'_a c'_a u'_y + (b'^2c'd'^3)\,u'_a b'_a c'_a c'_y\,,$$
$$2\,B_2 = D_1 - 3\,D_2 + D_3\,,$$

wobei:

$$D_1 = -6\,\Gamma\Gamma_y\,;$$

$D_2 \equiv 0$, da es bei Vertauschung von b und d das Zeichen ändert; endlich

$$D_3 = (c'b'^2d'^3)\,c'_a u'_a b'_a c'_y\,,$$
$$2\,D_3 = -2(c'^2b'd'^3)\,b'_a u'_a b'_a c'_y + 3(c'^2b'^2d'^2)\,d'_a u'_a b'_a c'_y\,,$$
$$D_3 = -6\,\Gamma\Gamma_y\,,$$

also

$$2\,B_2 = -12\,\Gamma\Gamma_y\,;$$
$$36\,\Gamma\Gamma_y = -B_3 = -(b'd'^3c'^2)\;c'_a b'^2_a u'_y\,,$$
$$= 6\,d^2_{c'}d_{b'}c'_a b'^2_a\cdot u'_y\,,$$
$$36\,\Gamma\Gamma_y = 6\,\alpha_{\beta'}\beta_{\alpha'}\cdot u'_y\,.$$

Wir setzen nun für die Invariante $\alpha_{\beta'}\beta_{\alpha'}$

(88) $$\underline{A = \alpha_{\beta'}\beta_{\alpha'} = a_{b'}^2\, a_{c'}\, b'_d\, c'^2_d},$$

dann ist

(89) $$\underline{\Gamma\Gamma_y \equiv \alpha_{\beta'}\alpha'_y\beta_{u'} = \frac{A}{6}u'_y}.$$

Die Gegenverwandtschaft ist also nur dann umkehrbar, wenn $A \gtrless 0$; dies wollen wir in folgendem immer voraussetzen. A ist eine Invariante vom 4. Grade in den Koeffizienten des Komplexes.

Aus (89) folgt noch der wichtige Satz:

„Jeder Ausdruck, der den symbolischen Faktor α_β enthält, hat den wirklichen Faktor $\frac{A}{6}$."

Aus den Symbolen α, α', β, β', ... lassen sich eine Reihe von Invarianten kettenartig bilden, wir setzen:

(90) $$\begin{cases} A_1 = \alpha_{\alpha'}, \\ A_2 = \alpha_{\beta'}\beta_{\alpha'}, \\ A_3 = \alpha_{\beta'}\beta_{\gamma'}\gamma_{\alpha'}, \\ A_4 = \alpha_{\beta'}\beta_{\gamma'}\gamma_{\delta'}\delta_{\alpha'}, \\ A_5 = \alpha_{\beta'}\beta_{\gamma'}\gamma_{\delta'}\delta_{\varepsilon'}\varepsilon_{\alpha'}, \\ A_6 = \alpha_{\beta'}\beta_{\gamma'}\gamma_{\delta'}\delta_{\varepsilon'}\varepsilon_{\eta'}\eta_{\alpha'} \end{cases}$$

usw.

Dann wird wegen des obigen Satzes:

(90a) $$\begin{cases} A_1 = 0, \\ A_2 = A, \\ A_3 = \frac{A}{6}A_1 = 0, \\ A_4 = \frac{A}{6}A_2 = \frac{A^2}{6}, \\ A_5 = \frac{A}{6}A_3 = 0, \\ A_6 = \frac{A}{6}A_4 = \frac{A^3}{36}. \end{cases}$$

Wir fragen uns nun, ob es Punkte gibt, die mit ihrem Gegenpunkte zusammenfallen. Solche Punkte nennen wir Doppelpunkte des Komplexes. Für diese müssen die sechs Gleichungen:

$$\underline{\alpha_i\,\alpha'_y = -\lambda\,y_i} \tag{91}$$

bestehen.

Hieraus erhält man für λ eine Gleichung 6. Grades:

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} \alpha_1\alpha'_1+\lambda & \alpha_1\alpha'_2 & \alpha_1\alpha'_3 & \alpha_1\alpha'_4 & \alpha_1\alpha'_5 & \alpha_1\alpha'_6 \\ \alpha_2\alpha'_1 & \alpha_2\alpha'_2+\lambda & . & . & . & . \\ \alpha_3\alpha'_1 & . & . & . & . & . \\ \alpha_4\alpha'_1 & . & . & . & . & . \\ \alpha_5\alpha'_1 & . & . & . & . & . \\ \alpha_6\alpha'_1 & . & . & . & . & \alpha_6\alpha'_6+\lambda \end{vmatrix} = 0\,. \tag{92}$$

Dies gibt durch Zerlegung:

$$\left\{\begin{aligned} \Delta_\lambda = {} & \frac{1}{6!}(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\eta)\,(\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\eta') + \lambda\cdot\frac{1}{5!}(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon)_{(\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon')} \\ & + \lambda^2\frac{1}{4!}(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)_{(\alpha'\beta'\gamma'\delta')} + \lambda^3\frac{1}{3!}(\alpha\,\beta\,\gamma)_{(\alpha'\beta'\gamma')} \\ & + \lambda^4\frac{1}{2!}(\alpha\,\beta)_{(\alpha'\beta')} + \lambda^5\,\alpha_{\alpha'} + \lambda^6 = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{93}$$

Wir setzen nun für die Invarianten, die in dieser Gleichung auftreten:

$$\left\{\begin{aligned} M_6 &= (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\eta)\,(\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta'\,\varepsilon'\,\eta')\,, \\ M_5 &= (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon)_{(\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon')} = \sum_i (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon)_i\,(\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon')_i\,, \\ M_4 &= (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)_{(\alpha'\beta'\gamma'\delta')} = \sum_{ik} (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)_{ik}\,(\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta')_{ik}\,, \\ M_3 &= (\alpha\,\beta\,\gamma)_{(\alpha'\beta'\gamma')} = \sum_{ikl} (\alpha\,\beta\,\gamma)_{ikl}\,(\alpha'\,\beta'\,\gamma')_{ikl}\,. \\ M_2 &= (\alpha\,\beta)_{(\alpha'\beta')} = \sum_{ik} (\alpha\,\beta)_{ik}\,(\alpha'\,\beta')_{ik}\,, \\ M_1 &= \alpha_{\alpha'} = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{94}$$

Dann wird aus (93):

$$\Delta_\lambda = \frac{M_6}{6!} + \lambda \frac{M_5}{5!} + \lambda^2 \frac{M_4}{4!} + \lambda^3 \frac{M_3}{3!} + \lambda^4 \frac{M_2}{2!} + \lambda^5 M_1 + \lambda^6 = 0 . \tag{95}$$

Wir berechnen nun diese M_i, von M_6 ausgehend. Es ist

$$M_6 = \begin{vmatrix} \alpha_{\alpha'} & \alpha_{\beta'} & \alpha_{\gamma'} & \alpha_{\delta'} & \alpha_{\varepsilon'} & \alpha_{\eta'} \\ \beta_{\alpha'} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{\alpha'} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{\alpha'} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_{\alpha'} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{\alpha'} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \eta_{\eta'} \end{vmatrix} .$$

Entwickelt man nach der ersten Zeile und Kolonne, so wird $M_6 = -A\,M_4 + (6-1)(6-2)\,\delta M_4$; δM_4 entsteht aus M_4, wenn man γ durch β ersetzt und mit $\alpha_{\beta'}\alpha'_{\gamma}$ multipliziert. So ist

$$\delta A_i = A_{i+2} .$$

Man erhält dieselben Gleichungen wie bei Entwicklung der Diskriminante eines quadratischen Strahlenkomplexes im R_3 (Abschnitt III, S. 57 ff.). Berücksichtigen wir hier noch die Gleichungen (90a), so erhalten wir:

$$\left\{\begin{array}{ll} M_1 = 0 , & M_4 = 2A^2 , \\ M_2 = -A , & M_5 = 0 , \\ M_3 = 0 , & M_6 = -\frac{10}{3} A^3 . \end{array}\right. \tag{96}$$

Somit wird

$$\Delta_\lambda = \lambda^6 - \frac{\lambda^4}{2!} A + \frac{\lambda^2}{4!} 2A^2 - \frac{1}{6!}\frac{10}{3} A^3 = 0$$

oder

$$\Delta_\lambda = \left(\lambda^2 - \frac{A}{6}\right)^3 = 0 . \tag{97}$$

Man erhält also zwei dreifach zählende Werte

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{A}{6}} .$$

Nun wird aber, da Δ_λ ein Kubus ist, Δ_{λ_1} und Δ_{λ_2} vom Range 3, d. h. es gibt zweimal ∞^2 viele Doppelpunkte, welche zwei Ebenen, die „Doppelebenen" des K_a ausfüllen. Deren Gleichungen werden wir weiter unten aufstellen.

Es gibt bei einem allgemeinen $K_2^{(5)}$ keine Punkte, deren Gegenpunkte unbestimmt sind.

Für einen solchen müßten nämlich die sechs Gleichungen $\alpha_i \alpha'_y = 0$ bestehen, d. h. es müßte

$$|\alpha_i \alpha'_k| = M_6 ,$$

also A verschwinden.

Da $M_6 = -\frac{10}{3} A^3$ ist, so wird auch aus (48a): $A \cdot \alpha'_x \alpha_{u'} = 0$, was mit dem dort Gesagten übereinstimmt.

Für einen Doppelpunkt ξ besteht die Gleichung

$$\alpha_{u'} \alpha'_\xi = \lambda u'_\xi ,$$

daher verschwindet Q_ξ identisch, d. h. die einem Doppelpunkte ξ entsprechende Gerade wird unbestimmt, K_ξ ist ein spezieller Geradenkomplex.

Dual erhält man zweimal ∞^2 viele Doppel-R_4, welche je eine Doppelebene des K_a enthalten. Der singuläre R_3 eines Doppel-R_4 ist unbestimmt.

8. Die Doppelebenen eines $K_2^{(5)}$.

Es entspricht jedem Punkte y ein halbspezieller Strahlenkomplex K_y, dessen Brennlinie $Q_y \equiv \pi'_\alpha \pi'_y \alpha'_y = 0$ die durch y gehende singuläre Gerade ist. Die Gegengerade von Q_y ist mit Q_y selbst identisch, da Q_y y mit Γ_y verbindet.

Wir schneiden nun Q_y durch einen $R_4(v')$; die Gleichung des Schnittpunktes s wird:

$$(u' v')_{(\alpha y)} \alpha'_y = 0$$

oder

$$u'_\alpha v'_y \alpha'_y - u'_y v'_\alpha \alpha'_y = 0 .$$

Wir bilden nun $Q_s = \pi'_\alpha \pi'_s \alpha'_s$, also

$$\begin{aligned} Q_s &= \pi'_\alpha \pi'_\beta \beta'_y v'_y \alpha'_s - \pi'_\alpha \pi'_y v'_\beta \beta'_y \alpha'_s , \\ &= \pi'_\alpha \pi'_\beta \beta'_y v'_y (\alpha'_\gamma \gamma'_y v'_y - \alpha'_y v'_\gamma \gamma'_y) \\ &\quad - \pi'_\alpha \pi'_y v'_\beta \beta'_y (\alpha'_\gamma \gamma'_\beta \beta'_y - \alpha'_y v'_y \gamma'_y) , \end{aligned}$$

$$Q_s = Q_y \left[(v'_\beta \beta'_y)^2 - \frac{A}{6} v'^2_y\right] . \tag{98}$$

D. h. Q_s ist im allgemeinen mit Q_y identisch. Alle Punkte auf Q_y haben also Q_y zur singulären Geraden. Q_s wird unbestimmt für

$$(v'_\beta \beta'_y)^2 - \frac{A}{6} v'^2_y = 0,$$

man erhält also auf Q_y zwei solche Punkte

$$\underline{\Gamma_y \pm \sqrt{\frac{A}{6}}\, u'_y = 0.} \tag{99}$$

Diese Punkte sind Doppelpunkte, wie man leicht beweist, wenn man ihre Gegenpunkte aufsucht. Wir nennen sie die zu y gehörigen Doppelpunkte D_{iy}. Sie liegen harmonisch zu y und Γ_y und sind mit den zu Γ_y gehörigen Doppelpunkten identisch. Die Punkte auf Q_y bilden eine zu ihren Gegenpunkten projektive Punktreihe, deren Doppelpunkte D_{iy} sind.

Durchläuft y die Gerade p^2, so beschreibt Γ_y die Gegengerade $G_{p^2} \equiv \pi'_\alpha \pi'_\beta p_{\alpha'} p_{\beta'} = 0$. Ebenso beschreiben die D_{iy} zwei Gerade F_1 und F_2, welche in den Doppelebenen Φ_1 und Φ_2 des K_a liegen. Ihre Gleichungen sind:

$$\underline{F_{1,2} \equiv \pi'_\alpha \pi'_\beta p_{\alpha'} p_{\beta'} \pm 2\sqrt{\frac{A}{6}}\, \pi'_\alpha p_{\alpha'} p_{\pi'} \pm \frac{A}{6} \pi'^2_p = 0.} \tag{100}$$

Die singulären Geraden der Punkte auf p^2 bilden daher eine Schar von Erzeugenden einer dreidimensionalen Fläche 2. Ordnung. Der anderen Schar gehören p^2, G_{p^2}, F_1 und F_2 an, diese vier Erzeugenden werden von allen Erzeugenden der anderen Art in vier harmonisch liegenden Punkten getroffen. Der durch p^2 und G_{p^2} gelegte $R_3\, R_{p^2}$ schneidet also die Doppelebenen nach zwei Geraden, den zu p^2 gehörigen Doppelgeraden.

Die singuläre Bedeutung des R_{p^2} erhellt auch noch aus folgendem. Ist $p^2 = (y\,z)$ also $G_{p^2} = (\Gamma_y \Gamma_z)$, so erscheint R_{p^2} durch die vier Punkte y, z, Γ_y und Γ_z bestimmt. Jeder seiner Punkte kann daher in der Form $\lambda_1 y + \lambda_2 z + \lambda_3 \Gamma_y + \lambda_4 \Gamma_z$ dargestellt werden. Sein Gegenpunkt Γ_λ wird dann $\lambda_1 \Gamma_y + \lambda_2 \Gamma_z + \lambda_3 \frac{A}{6} y + \lambda_4 \frac{A}{6} z$, liegt *also auch in* R_{p^2}; ein zu λ gehöriger Doppelpunkt wird

$\lambda \pm \sqrt{\frac{A}{6}}\,\Gamma_\lambda$, liegt also auf einer zu p^2 gehörigen Doppelgeraden.

Gehört y der Ebene $p^3 = (x\,y\,z)$ an, so liegt Γ_y in der Gegenebene

$$T_{\pi' p} \equiv \pi'_\alpha \pi'_\beta \pi'_\gamma p_{\alpha'} p_{\beta'} p_{\gamma'};$$

die Punkte beider Ebenen sind so durch den K_a eindeutig einander zugeordnet.

Die Doppelpunkte D_{ix}, D_{iy}, D_{iz} bestimmen dann die beiden Doppelebenen, als deren Gleichung man erhält:

$$(101)\quad \begin{cases} \underline{E_{1,2} \equiv \pi'_\alpha \pi'_\beta \pi'_\gamma p_{\alpha'} p_{\beta'} p_{\gamma'} + 3\,\lambda_{1,2}\,\pi'_p \pi'_\alpha \pi'_\beta p_{\alpha'} p_{\beta'}} \\ \qquad \underline{+\, 3\,\lambda_{1,2}^2\,\pi'^2_p \pi'_\alpha p_{\alpha'} + \lambda_{1,2}^3\,\pi'^3_p = 0\,.} \end{cases}$$

Daß diese Gleichung tatsächlich von p^3 unabhängig ist, wird später gezeigt werden.

Sind endlich x, y, z und t vier Punkte und D_{ix}, D_{iy}, D_{iz} und D_{it} die zugehörigen Doppelpunkte, so werden die zwei, durch die zusammengehörigen Doppelpunkte bestimmten Räume:

$$(102)\quad \begin{cases} R_{ip^4} \equiv \pi'_\alpha \pi'_\beta \pi'_\gamma \pi'_\delta p_{\alpha'} p_{\beta'} p_{\gamma'} p_{\delta'} + 4\,\lambda_{1,2}\,\pi'_p \pi'_\alpha \pi'_\beta \pi'_\gamma p_{\alpha'} p_{\beta'} p_{\gamma'} \\ +\, 6\,\lambda_{1,2}^2\,\pi'^2_p \pi'_\alpha \pi'_\beta p_{\alpha'} p_{\beta'} + 4\,\lambda_{1,2}^3\,\pi'^3_p \pi'_\alpha p_{\alpha'} + \lambda_{1,2}^4\,\pi'^4_p = 0\,. \end{cases}$$

Hierbei ist für $p^4 \ldots (x\,y\,z\,t)$ zu setzen. Wir setzen nun:

$$(103)\quad \begin{cases} M_2 = \pi'_\alpha \pi'_\beta p_{\alpha'} p_{\beta'}\,, \\ M_1 = \pi'_p \pi'_\alpha p_{\alpha'}\,, \\ M'_4 = \pi_{\alpha'} \pi_{\beta'} \pi_{\gamma'} \pi_{\delta'} p'_\alpha p'_\beta p'_\gamma p'_\delta\,, \\ M'_3 = \pi_{p'} \pi_{\alpha'} \pi_{\beta'} \pi_{\gamma'} p'_\alpha p'_\beta p'_\gamma\,, \\ M'_2 = \pi^2_{p'} \pi_{\alpha'} \pi_{\beta'} p'_\alpha p'_\beta\,, \\ M'_1 = \pi^3_{p'} \pi_{\alpha'} p'_\alpha\,, \\ M_0 = \pi'^2_p\,. \end{cases}$$

In diesen Formen können wir nun durch Umformung bewirken, daß π mit p vertauscht erscheint. Wir unterlassen jedoch hier diese etwas längere Rechnung, sie ist genau so zu machen wie diejenige, welche auf (116) führt. Man erhält:

(104) $\underline{6\,M_2 = 3\,M_2' + A\,M_0}$,

(105) $\underline{6\,M_1 = -M_1'}$,

(106) $\underline{9\,M_4' = -12\,A\,M_2 - 3\,A\,M_2' - A^2 M_0}$,

(107) $\underline{9\,M_3' = 3\,A\,M_1 - A\,M_1'}$.

Aus (106) wird, wenn man (104) berücksichtigt:

(108) $$\underline{M_4' = -2\,A\,M_2}\,.$$

Ebenso aus (107), wenn man (105) berücksichtigt:

(109) $$\underline{M_3' = A\,M_1}\,.$$

Es lassen sich also alle diese Formen auf M_0, M_1 und M_2 zurückführen.

Die zu den Formeln (104) bis (109) dualen geben Relation zwischen den in (102) auftretenden Größen. Berücksichtigt man diese, so erhält man $R_{ip^4} \equiv 0$, wie es sein muß, da alle Doppelpunkte in den zwei Doppelebenen liegen, der durch vier Doppelpunkte bestimmte R_3 also unbestimmt werden muß.

Wir stellen nun die Gleichungen der beiden Doppelebenen auf einem anderen Wege auf. Ist ξ ein zu y gehöriger Doppelpunkt, so wird $Q_\xi \equiv 0$ und es ist

(110) $$\underline{K_\xi \equiv \pi_{\alpha'}^2\, a_\alpha'\, \alpha_y' \pm \lambda\, \pi_{\alpha'}^2\, a_y' = 0}$$

ein spezieller $K_1^{(5)}$. K_ξ ist der dem Punkte ξ bezüglich des K_a zugeordnete $K_1^{(5)}$. Man kann K_ξ aber auch als einen dem y zugeordneten $K_1^{(5)}$ auffassen, nur erfolgt diese Zuordnung dann nicht durch K_a, sondern durch einen der Komplexe

$$\Phi_i \equiv \pi_{\alpha'}^2\, a_\alpha'\, \pi_\alpha' \pm \lambda\, \pi_{\alpha'}^3 = 0\,;$$

da jeder $K_1^{(5)}\,\Phi_y$ speziell ist, so sind diese Φ_i selbst speziell und stellen daher zwei Ebenen

(111) $$\underline{\Phi_i \equiv \pi_{\alpha'}^2\, \pi_{\alpha'}\, a_\alpha' \pm \lambda\, \pi_{\alpha'}^3 = 0}$$

dar.

Ein $R_3(p'^2)$ schneidet Φ_i in dem Punkte ξ

$$u_\xi \equiv a_{p'}^2\, a_{\alpha'}\, \alpha_{u'} \mp \lambda\, a_{p'}^2\, a_{u'} = 0\,;$$

dessen Gegenpunkt wird

$$a_{p'}^2 a_{\alpha'} \alpha_{\beta'} \beta_{u'} \mp \lambda a_{p'}^2 a_{\alpha'} \alpha_{u'} = 0$$

oder

$$\frac{A}{6} a_{p'}^2 a_{u'} \mp \lambda a_{p'}^2 a_{\alpha'} \alpha_{u'} = 0\,,$$

ist somit mit ξ identisch. Jeder Punkt von Φ_i ist also Doppelpunkt, d. h. die durch (111) gegebenen Ebenen sind die Doppelebenen des Komplexes K_a. Sie schneiden sich nur für $A = 0$, wie man durch Schiebung von Φ_1 und Φ_2 beweist. Ist aber $A = 0$, dann fallen sie wegen $\lambda = \sqrt{\frac{A}{6}}$ zusammen. Der Fall von zwei getrennten, sich schneidenden Doppelebenen kommt nicht vor.

Wir können nun leicht eine Konstruktion für den Gegenpunkt Γ_y von y angeben. Man verbindet z. B. y mit Φ_1 zu einem R_3; dieser schneidet Φ_2 in D_{1y}. Die Gerade $(y D_{1y})$ trifft Φ_1 in D_{2y} und Γ_y liegt zu y bezüglich der Doppelpunkte D_{iy} harmonisch.

Die dualen Betrachtungen führen natürlich zu demselben Resultat. Durch den singulären R_3 eines $R_4(v')$ gehen zwei Doppel-R_4, harmonisch zu v' und $\Gamma_{v'}$. Diese Doppel-R_4 enthalten je eine Doppelebene.

9. Die kovarianten Ebenenkomplexe.

Durch (101) sind die Ebenen gegeben, welche die zu x, y und z gehörigen Doppelpunkte verbinden. Wir untersuchen nun die in (101) auftretenden Formen mit zwei Reihen Ebenenkoordinaten näher. Wir setzen:

(112) $$\underline{T_{\pi' p} \equiv \pi'_\alpha \pi'_\beta \pi'_\gamma p_{\alpha'} p_{\beta'} p_{\gamma'}\,,}$$

(113) $$\underline{S_{\pi' p} \equiv \pi'_p \pi'_\alpha \pi'_\beta p_{\alpha'} p_{\beta'}\,,}$$

(114) $$\underline{R_{\pi' p} \equiv \pi'^2_p \pi'_\alpha p_{\alpha'}\,,}$$

(115) $$\underline{K_{\pi' p} \equiv \pi'^3_p\,.}$$

Diese Formen lassen sich nun vor allem so umformen, daß π und p darin vertauscht erscheinen. Wir geben diese Umformung zur Veranschaulichung der Rechnung nur für eine dieser Formen, z. B. $S_{\pi' p}$. Es wird

$$6\, S_{\pi' p} = (\pi^3\, p\, \alpha\, \beta)\, p_{\alpha'}\, p_{\beta'} = -(p\, \pi^3\, \alpha\, \beta)\, p_{\alpha'}\, p_{\beta'}\,,$$

$$-12\, S_{\pi' p} = 3(p^2\, \pi^2\, \alpha\, \beta)\, \pi_{\alpha'}\, p_{\beta'} + (p^2\, \pi^3\, \alpha)\, \beta_{\alpha'}\, p_{\beta'}\,,$$

$$-12\, S_{\pi' p} = 3\, A_1 + A_2\,,$$

wobei

$$A_2 = -(p^3\, \pi^3)\, \frac{A}{6} = \pi_p'^3\, A$$

und

$$\begin{aligned} 3\, A_1 &= 3(p^2\, \pi^2\, \alpha\, \beta)\, p_{\beta'}\, \pi_{\alpha'}\,, \\ &= -2(p^3\, \pi\, \alpha\, \beta)\, \pi_{\beta'}\, \pi_{\alpha'} + (p^3\, \pi^2\, \beta)\, \alpha_{\beta'}\, \pi_{\alpha'}\,, \\ &= 12\, S_{\pi p'} - A \cdot \pi_p'^3\,. \end{aligned}$$

Somit wird

$$\underline{S_{\pi' p} = -S_{\pi p'}\,.} \tag{116}$$

Analog erhält man für die andern Formen:

$$\underline{T_{\pi' p} = T_{\pi p'}\,,} \tag{117}$$

$$\underline{R_{\pi' p} = R_{\pi p'}\,,} \tag{118}$$

$$\underline{K_{\pi' p} = -K_{\pi p'}\,.} \tag{119}$$

Wir bilden nun diese Formen T, S, R und K für diese Komplexe selbst, d. h. wir ersetzen z. B. in $T_{\pi' p}$ die p_{ikl} durch die Koeffizienten von π'_{ikl} einer dieser Formen, z. B. $R_{\pi' p}$. Die so erhaltene Form bezeichnen wir mit $T_{\pi' p}(R_{\pi p'})$. Nicht symbolisch wird, wenn M und N zwei dieser Formen T, S, R und K sind:

$$\underline{M_{\pi' p}(N_{\pi p'}) = 6 \sum \frac{\partial M_{\pi' p}}{\partial p'_{ikl}} \cdot \frac{\partial N_{\pi p'}}{\partial \pi'_{ikl}}\,.} \tag{120}$$

Bei der Berechnung dieser Formen $M(N)$ verfährt man am einfachsten folgend: Es sei z. B. $S_{\pi' p}(T_{\pi p'})$ zu *ermitteln.* Wir schreiben $S_{\pi' p}$ mit einem Faktor in

Determinantenform, so daß die p gestrichen auftreten. Da $S_{\pi' p} = \pi'_p p_{\alpha'} p_{\beta'} \pi'_\alpha \pi'_\beta$ ist, so wird

$$S_{\pi' p} = \tfrac{1}{6} (p'^3 \pi' \alpha' \beta') \pi'_\alpha \pi'_\beta .$$

Nun schreiben wir ebenso $T_{\pi p'}$, so daß die π' gestrichen auftreten, also

$$T_{\pi p'} = \tfrac{1}{6} (\pi'^3 \alpha' \beta' \gamma') p'_\alpha p'_\beta p'_\gamma .$$

Hier steht in der Determinante $\alpha' \beta' \gamma'$ neben π'^3; dies setzen wir statt p'^3 in $S_{\pi' p}$ ein; so erhalten wir wegen (120)

$$S_{\pi' p}(T_{\pi p'}) = \tfrac{1}{6} (\alpha' \beta' \gamma' \pi' \delta' \varepsilon') p'_\alpha p'_\beta p'_\gamma \pi'_\delta \pi'_\varepsilon .$$

Auf diesem Wege ergibt sich der Reihe nach:

$$T_{\pi' p}(T_{\pi p'}) = \tfrac{1}{6} (\alpha' \beta' \gamma' \delta' \varepsilon' \eta') \pi'_\alpha \pi'_\beta \pi'_\gamma p'_\delta p'_\varepsilon p'_\eta ,$$

also durch Vertauschung:

$$(121) \qquad \underline{T_{\pi' p}(T_{\pi p'}) = \left(\frac{A}{6}\right)^3 K_{\pi p'} ,}$$

$$6\, T_{\pi' p}(S_{\pi p'}) = (p' \delta' \varepsilon' \alpha' \beta' \gamma') \pi'_\alpha \pi'_\beta \pi'_\gamma p'_\delta p'_\varepsilon ,$$

$$\begin{aligned} 12\, T_{\pi' p}(S_{\pi p'}) &= -(p'^2 \alpha' \gamma' \delta' \varepsilon') p'_\beta \beta'_\alpha \pi'_\gamma \pi'_\delta \pi'_\varepsilon \\ &\quad + 3 (p'^2 \alpha' \beta' \delta' \varepsilon') \gamma'_\alpha p'_\beta \pi'_\gamma \pi'_\delta \pi'_\varepsilon , \\ &= -A_1 + 3 A_2 , \end{aligned}$$

wobei

$$A_1 = A\, T_{p \pi'}$$

und

$$A_2 = \frac{A}{6} (p'^2 \pi' \beta' \delta' \varepsilon') p'_\beta \pi'_\delta \pi'_\varepsilon = \frac{A}{6} A_3 ,$$

$$\begin{aligned} 3 A_3 &= (p'^3 \beta' \delta' \varepsilon') \pi'_\beta \pi'_\delta \pi'_\varepsilon + 2 (p'^3 \pi' \delta' \varepsilon') \delta'_\beta \pi'_\delta \pi'_\varepsilon \\ &= 6\, T_{\pi' p} + 2 A R_{p \pi'} , \end{aligned}$$

also

$$3 A_2 = A\, T_{\pi' p} + \frac{A^2}{3} R_{\pi' p}$$

und schließlich

$$(122) \qquad \underline{T_{\pi' p}(S_{\pi p'}) = \frac{A^2}{36} R_{\pi' p} .}$$

Analoge Umformungen führen zu folgenden Formeln:

$$\underline{T_{\pi' p}(R_{\pi p'}) = -\frac{A}{6} S_{\pi' p}\,,} \tag{123}$$

$$\underline{T_{\pi' p}(K_{\pi p'}) = T_{\pi' p}\,,} \tag{124}$$

$$\underline{S_{\pi' p}(T_{\pi p'}) = -\frac{A^2}{36} R_{\pi p'}\,,} \tag{125}$$

$$\underline{S_{\pi' p}(S_{\pi p'}) = \frac{A}{8} S_{\pi' p} + \frac{A^2}{36} K_{\pi' p}\,,} \tag{126}$$

$$\underline{S_{\pi' p}(R_{\pi p'}) = -\frac{1}{3} T_{\pi' p} - \frac{A}{9} R_{\pi' p}\,,} \tag{127}$$

$$\underline{S_{\pi' p}(K_{\pi p'}) = S_{\pi' p}\,,} \tag{128}$$

$$\underline{R_{\pi' p}(T_{\pi p'}) = -\frac{A}{6} S_{\pi' p}\,,} \tag{129}$$

$$\underline{R_{\pi' p}(S_{\pi p'}) = +\frac{1}{3} T_{\pi' p} + \frac{A}{9} R_{\pi' p}\,,} \tag{130}$$

$$\underline{R_{\pi' p}(R_{\pi p'}) = -\frac{2}{3} S_{\pi' p} + \frac{A}{18} K_{\pi' p}\,,} \tag{131}$$

$$\underline{R_{\pi' p}(K_{\pi p'}) = R_{\pi' p}\,.} \tag{132}$$

Eine Anwendung dieser Formeln ist z. B. folgende. Durch (101) ist eine Ebene bestimmt, welche drei Doppelpunkte enthält. Ihre Gegenebene muß daher mit ihr zusammenfallen. Schreiben wir (101) in der Form

$$E_{\pi' p} \equiv T_{\pi' p} + 3\lambda S_{\pi' p} + 3\lambda^2 R_{\pi' p} + \lambda^3 K_{\pi' p} = 0$$

oder nach (116) bis (119) auch

$$E_{\pi p'} \equiv T_{\pi p'} - 3\lambda S_{\pi p'} + 3\lambda^2 R_{\pi p'} - \lambda^3 K_{\pi p'} = 0\,.$$

Die Gegenebene von E ist durch $T_{\pi' p}(E_{\pi p'}) = 0$ bestimmt. Dies gibt also

$$T_{\pi' p}(T_{\pi p'}) - 3\lambda T_{\pi' p}(S_{\pi p'}) + 3\lambda^2 T_{\pi' p}(R_{\pi p'}) - \lambda^3 T_{\pi' p}(K_{\pi p'}) = 0\,,$$

was nach Anwendung obiger Formeln tatsächlich auf E zurückführt.

Wenn wir in den Formen T, S, R und K die p durch die a ersetzen, so erhalten wir drei kovariante Komplexe und den K_a:

$$(133)\quad \begin{cases} T_{\pi' a} = \pi'_\alpha \pi'_\beta \pi'_\gamma a_{\alpha'} a_{\beta'} a_{\gamma'} = T_{\pi a'}\,, \\ S_{\pi' a} = \pi'_a \pi'_\alpha \pi'_\beta a_{\alpha'} a_{\beta'} = -S_{\pi a'}\,, \\ R_{\pi' a} = \pi'^2_a \pi'_\alpha a_{\alpha'} = R_{\pi a'}\,, \\ K_{\pi' a} = \pi'^3_a = -K_{\pi a'}\,. \end{cases}$$

Umgekehrt können wir aus diesen durch den Prozeß $\delta M = \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial M}{\partial a_{ikl}} p_{ikl}$ Formen mit π und p erzeugen; k ist hierbei der Grad von M in den a_{ikl}, also für $T_{\pi' a}$, $S_{\pi' a}$, $R_{\pi' a}$ der Reihe nach 7, 5 und 3. Wir erhalten so:

$$\begin{aligned} 7\,\delta T_{\pi' a} &= T_{\pi' p} + 3\,\pi'_p p^2_{b'} a_{b'} \pi'_\alpha \pi'_\beta a_{\alpha'} a_{\beta'} + 3\,\pi'_b b^2_{p'} a_{p'} \pi'_\alpha \pi'_\beta a_{\alpha'} a_{\beta'} \\ &= T_{\pi' p} + 3\,A_1 + 3\,A_2\,, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} 6\,A_2 &= (b'^3 \pi' p'^2)\, p'_a \pi'_\alpha \pi'_\beta a_{\alpha'} a_{\beta'}\,, \\ &= (p'^2 b'^3 \pi')\, p'_a \pi'_\alpha \pi'_\beta a_{\alpha'} a_{\beta'}\,, \\ 18\,A_2 &= 3(p'^3 b'^2 \pi')\, b'_a \pi'_\alpha \pi'_\beta a_{\alpha'} a_{\beta'} - (p'^3 b'^3)\, \pi'_a \pi'_\alpha \pi'_\beta a_{\alpha'} a_{\beta'}\,, \\ 18\,A_2 &= 18\, p^2_{b'} p_{\pi'} b'_a \pi'_\alpha \pi'_\beta a_{\alpha'} a_{\beta'} - 6\, K_{p a'} S_{\pi' a}\,, \\ 3\,A_2 &= 3\,A_1 + K_{p' a} S_{\pi' a}\,, \end{aligned}$$

somit

$$7\,\delta T_{\pi' a} = T_{\pi' p} + 6\,A_1 + K_{p' a} S_{\pi' a}\,.$$

A_1 enthält den Faktor $a_{b'}$, somit nach (77a):

$$\begin{aligned} 2\,A_1 &= 2\,a_{b'} a_{\alpha'} a_{\beta'} b'^2_p \pi'_p \pi'_\alpha \pi'_\beta\,, \\ &= \gamma_{\alpha'} \gamma'_p p_{\beta'} \pi'_p \pi'_\alpha \pi'_\beta - \gamma_{\beta'} \gamma'_p p_{\alpha'} \pi'_p \pi'_\alpha \pi'_\beta\,, \\ A_1 &= \gamma_{\alpha'} \gamma'_p p_{\beta'} \pi'_p \pi'_\alpha \pi'_\beta = -\frac{A}{6} \pi'_p p_{\beta'} \pi'_p \pi'_\beta\,, \\ &= \frac{A}{6} R_{\pi' p}\,, \end{aligned}$$

somit

$$(134)\quad \underline{\delta T_{\pi' a} = \tfrac{1}{7}\,(T_{\pi' p} + A\,R_{\pi' p} + K_{p' b} S_{\pi' a})\,.}$$

Ebenso erhält man leicht:

$$\underline{\delta S_{\pi' a} = \frac{1}{5}\left(3\, S_{\pi' p} + \frac{2}{3} R_{\pi' a} K_{p' a} + \frac{A}{3} K_{\pi' p}\right)}\,, \tag{135}$$

$$\underline{\delta R_{\pi' a} = \tfrac{1}{3}(3\, R_{\pi' p} + \tfrac{1}{3} K_{\pi' a} K_{p' a})}\,, \tag{136}$$

$$\underline{\delta K_{\pi' a} = K_{\pi' p}}\,. \tag{137}$$

Wir gehen nun von den Gleichungen (111) aus. Dort erscheinen die beiden Doppelebenen Φ in der Form:

$$\Phi_{\pi a'} \equiv R_{\pi a'} + \lambda K_{\pi a'} = 0\,.$$

λ ist hierbei eine Wurzel der Gleichung $\lambda^2 - \dfrac{A}{6} = 0$.

Eine Doppelebene muß mit ihrer Gegenebene zusammenfallen. Wenn wir daher $T_{\pi' p}(\Phi_{\pi a'})$ bilden, so muß dies bis auf einen Faktor ω mit Φ identisch werden, d. h. es ist

$$T_{\pi' p}(\Phi_{\pi a'}) \equiv \omega\, \Phi\,,$$

$$T_{\pi' p}(R_{\pi a'}) + \lambda\, T_{\pi' p}(K_{\pi a'}) = \omega\, \Phi\,,$$

also nach (123) und (124)

$$-\frac{A}{6} S_{\pi' a} + \lambda\, T_{\pi' a} = \omega\, \Phi\,,$$

$$\underline{\Phi' \equiv \frac{A}{6} S_{\pi a'} + \lambda\, T_{\pi a'} = \omega\,(R_{\pi a'} + \lambda K_{\pi a'})}\,. \tag{138}$$

Wir bilden nun die Form $T_{\pi' p}$ auf beiden Seiten der Gleichung noch einmal, dann wird

$$\begin{aligned}\frac{A}{6} T_{\pi' p}(S_{\pi a'}) + \lambda\, T_{\pi' p}(T_{\pi a'}) &= \omega\, \Phi'\,,\\ &= \omega^2 (R_{\pi a'} + \lambda K_{\pi a'})\,.\end{aligned}$$

Die linke Seite gibt nach (122) und (121):

$$\frac{A^3}{216}(R_{\pi a'} + \lambda K_{\pi a'})\,,$$

somit ist

$$\frac{A^3}{216} = \omega^2$$

und

$$\underline{\omega = \frac{A}{6}\sqrt{\frac{A}{6}} = \frac{A}{6}\lambda}\,. \tag{139}$$

Setzen wir dies in (138) ein, so ergeben sich entsprechend den beiden Doppelebenen für $\pm\lambda$ folgende Gleichungen

$$\frac{A}{6} S_{\pi a'} + \lambda T_{\pi a'} = \frac{A}{6} \lambda (R_{\pi a'} + \lambda K_{\pi a'}) ,$$

$$\frac{A}{6} S_{\pi a'} - \lambda T_{\pi a'} = \frac{A}{6} \lambda (-R_{\pi a'} + \lambda K_{\pi a'}) .$$

Hieraus folgt durch Addition und Subtraktion:

$$\frac{A}{6} S_{\pi a'} = \lambda^2 \frac{A}{6} K_{\pi a'} ,$$

also

(140) $$\underline{S_{\pi a'} = \frac{A}{6} K_{\pi a'} .}$$

Ferner durch Subtraktion

(141) $$\underline{T_{\pi a'} = \frac{A}{6} R_{\pi a'} .}$$

Aus (140) folgt, wie auch leicht anders zu bestätigen, $S_{a a'} \equiv 0$, aus (141):

(142) $$\underline{T_{a a'} = \frac{A^2}{6} .}$$

Wenn wir auf $A = a_{b'}^2 a_{c'} c_a'^2 d_{b'}$ den oben definierten δ-Prozeß anwenden, so wird

$$4\,\delta A = 2\,p_{b'}^2 p_{\alpha'} b'_\alpha + 2\,a_{p'}^2 a_{\alpha'} \alpha_{p'} ,$$

(143) $$\underline{\delta A = R_{p a'} .}$$

Wir wenden nun auf beide Seiten von (140) und (141) den δ-Prozeß an. Aus (140) wird nach (135) und (137) mit Rücksicht auf (143):

(144) $$\underline{S_{\pi' p} = \frac{2}{9} R_{p' a} K_{\pi' a} - \frac{2}{9} R_{\pi' a} K_{p' a} - \frac{A}{18} K_{\pi' p} .}$$

Aus (141) wird nach (134), (136) und (143):

$$T_{\pi' p} + A\,R_{\pi' p} + K_{p' a} S_{\pi' a} = \frac{2}{3} R_{p' a} R_{\pi' a} + \frac{A}{2} R_{\pi' p} + \frac{A}{18} K_{\pi' a} K_{p' a} ,$$

also wegen (140):

$$(145)\qquad \underline{T_{\pi' p} = \frac{2}{3} R_{p' a} R_{\pi' a} - \frac{A}{2} R_{\pi' p} - \frac{A}{9} K_{\pi' a} K_{p' a}\,.}$$

Nun können wir auch beweisen, daß (101) von p^3 unabhängig ist. Setzen wir nämlich für $T_{\pi' p}$ und $S_{\pi' p}$ in (101) die Werte aus (145) und (144) ein, so wird

$$E_{1,2} \equiv \tfrac{2}{3} (R_{\pi' a} + \lambda_{1,2} K_{\pi' a}) (R_{p' a} - \lambda K_{p' a}) = 0\,,$$

führt somit auf die durch (111) gegebenen Doppelebenen.

Aus (145) folgt noch für $p = \pi$:

$$(146)\qquad \underline{T_{\pi' \pi} = \tfrac{2}{3} (R_{\pi' a} + \lambda K_{\pi' a}) (R_{\pi' a} - \lambda K_{\pi' a})\,.}$$

$T_{\pi' \pi} = 0$ führt also auf die Doppelebenen, wie es sein muß. Durch $T_{\pi' \pi} = 0$ ist nämlich ein quadratischer Ebenenkomplex im R_5 dargestellt, dessen Ebenen die Eigenschaft haben, ihre Gegenebenen zu schneiden. Denn damit sich $\pi_p'^3 = 0$ und $T_{\pi' p} = 0$ schneiden, muß $T_{pp'} = 0$ sein. Wenn aber p^3 ihre Gegenebene schneidet, so muß der Schnittpunkt Doppelpunkt sein, d. h. er muß einer der beiden Doppelebenen angehören. p^3 schneidet somit eine derselben, was durch (146) zum Ausdruck kommt. Schneidet eine Ebene p^3 beide Doppelebenen, so gehört sie sowohl dem Komplexe $K_{\pi' a} = 0$ als auch $R_{\pi' a} = 0$ an.

10. Der halbspezielle und polare Ebenenkomplex.

Man kann leicht beweisen, daß A die einzige Invariante des K_a ist. Es sei M der vorgelegte invariante Ausdruck, welchen wir zuert so umformen, daß keine Determinante mehr in ihm auftritt. Dann besteht es nur aus Faktoren $a_{b'}$. Die Symbole a und b lassen sich daher dann nach (76) zu $\alpha\,\alpha'$ zusammenziehen. Enthält M dann $\alpha_{\beta'}$, so sondert sich nach (89) $\dfrac{A}{6}$ ab. M kann also nur noch Faktoren vom Typus $a_{\alpha'}$ enthalten. Wir haben also

$$M = a_{\alpha'}\, a_{\beta'}\, a_{\gamma'}\, \alpha_{b'}\, \beta_{c'}\, \gamma_{d'} \cdot M'\,.$$

Dieser Ausdruck entsteht nun aus $T_{\pi' a}$, wenn wir für die $\pi'_{ikl} \ldots (b'c'd')_{ikl}$ setzen. Da nun

$$T_{\pi' a} = \frac{A}{6} R_{\pi' a}$$

ist, so sondert sich auch hier aus M der Faktor $\frac{A}{6}$ ab. Damit ist also bewiesen, daß sich $\frac{A}{6}$ als Faktor aus M absondert, wenn M den symbolischen Faktor $a_{\alpha'}$ enthält. M wird so schließlich eine Potenz von A oder verschwindet.

Ist $A \gtrless 0$, so nennen wir den K_a allgemein. Für $A = 0$ sagen wir, er ist „halbspeziell". Wegen (140) und (141) verschwinden $S_{\pi a'}$ und $T_{\pi a'}$ identisch und nach (111) fallen die beiden Doppelebenen zusammen in eine einzige

$$(147) \qquad \underline{\Phi \equiv \pi_{\alpha'}^2 a'_\alpha \pi_{\alpha'} \equiv R_{\pi a'} = 0\,.}$$

Der Komplex $R_{\pi a'} = 0$ ist dann also speziell und stellt die einzige Doppelebene dar, welche wegen $R_{a a'} = A = 0$ dem K_a selbst angehört.

$T_{\pi \pi'}$ wird demgemäß ein vollständiges Quadrat nach (146); ebenso nach (145) $T_{\pi' p}$, was mit Φ identisch wird.

Ist der K_a allgemein, so sahen wir, daß sich die kovarianten Formen T, S, R auf R und K zurückführen lassen. Die Komplexe $T_{\pi a'} = 0$ und $S_{\pi a'} = 0$ sind also mit $R_{\pi a'} = 0$ und K_a identisch. Die geometrische Bedeutung von $T_{\pi a'} = 0$ ist folgende: Soll die Gegenebene von p^3 dem K_a angehören, so muß $T_{p a'} = 0$ sein, d. h. $T_{\pi a'} = 0$ ist die Abbildung des Grundkomplexes in der Gegenverwandtschaft. Dieselbe Bedeutung hat $R_{\pi a'} = 0$.

Bei einem halbspeziellen Ebenenkomplex liegt der Gegenpunkt Γ_y jedes Punktes y in der Doppelebene Φ; mit Γ_y fallen auch die zu y gehörigen Doppelpunkte zusammen. Der Gegenpunkt eines Punktes von Φ wird unbestimmt, da für $A = 0$ die Gegenverwandtschaft nicht umkehrbar ist. Γ_y ist Gegenpunkt jedes Punktes im Raume $(y\Phi)$.

Ein weiterer Fall tritt ein, wenn $R_{\pi a'} \equiv 0$ ist. Diese Bedingung ergibt die 20 Gleichungen

$$(148) \qquad \underline{a_{ik} a_{\alpha'} \alpha'_l = 0 = a_{ik} a_{b'} b'^2_c c_l = 0\,.}$$

Es verschwindet dann jeder Ausdruck, der einen Faktor vom Typus $a_{\alpha'}$ enthält.

Es sei p^2 eine Gerade, $G_{p^2} \equiv p_{\alpha'} p_{\beta'} \pi'_\alpha \pi'_\beta = 0$ ihre Gegengerade. Die Gleichung des $R_3(p^2 G_{p^2})$ wird

$$(\pi^2 p^2 \alpha \beta) q_{\alpha'} q_{\beta'} = 0 \,,$$

oder wenn wir für $(\pi^2 p^2) \ldots \varrho^4$ schreiben, so wird auch

$$\varrho'_\alpha \varrho'_\beta q_{\alpha'} q_{\beta'} = 0$$

oder

$$\varrho'_a q'_b \varrho'_\beta q_{\beta'} a^2_{b'} = 0 \,,$$

$$(b^3 q a^2) q_{\beta'} \varrho'_\beta \varrho'_a = 0 \,,$$

dies führt umgeformt auf Ausdrücke mit $b_{\beta'}$ und $a_{\beta'}$, also wird für $R_{\pi a'} \equiv 0$

$$(\varrho^4 \alpha \beta) q_{\alpha'} q_{\beta'} \equiv 0 \,.$$

Es schneiden sich also Q_y und Q_z in einem Punkte ξ, denn der von Q_y und Q_z bestimmte R_3 ist mit $R_3(p^2 G_{p^2})$ für $p^2 = (y z)$ identisch, wird also unbestimmt. Um ξ zu bestimmen, verbinden wir Q_y mit einer Ebene p^3 zu einem $R_4(v')$:

$$x_{v'} \equiv (x p^3 y \alpha) \alpha'_y = 0 \,.$$

$R_4(v')$ wird von Q_z dann in ξ geschnitten.

Die Gleichung von ξ wird also

$$(\beta z)_{(u' v')} \beta'_z = 0$$

oder

$$\beta_{u'} (z p^3 y \alpha) \alpha'_y \beta'_z - u'_z (\beta p^3 y \alpha) \alpha'_y \beta'_z = 0 \,.$$

Hier setzen wir im zweiten Term $(p^3 y) = \varrho^4$, dann wird

$$(\varrho^4 \alpha \beta) \alpha'_y \beta'_z = \tfrac{1}{2} (\varrho^4 \alpha \beta) q_{\alpha'} q_{\beta'} \equiv 0 \,.$$

Im ersten Term setzen wir $(z p^3 y) = w'$, so wird

$$u'_\xi = w'_\alpha \alpha'_y \cdot u'_\beta \beta'_z = 0 \,,$$

also

$$\Gamma_z \equiv u'_\beta \beta'_z = 0 \,.$$

ξ ist somit der Gegenpunkt eines willkürlichen Punktes z. Alle Gegenpunkte fallen in ξ, dem „Pol“ des Komplexes K_a, zusammen. Wir nennen demzufolge den K_a einen „polaren Ebenenkomplex“. Jede Ebene durch den Pol gehört dann dem Komplexe an.

Ist endlich $H = u'_\beta \beta'_x \equiv 0$, der Pol also auch unbestimmt, so ist der K_a speziell und a^3 ist seine „Leitebene“.

Damit die a_{ikl} Koordinaten einer Ebene sind, müssen nach früherem die Gleichungen

$$a_{b'}^2 \, a_i \, b_k' = 0$$

erfüllt sein. Von diesen sind aber nur zehn voneinander unabhängig. Man kann jedoch auch diese Bedingungen so fassen, daß man z. B. 9 der obigen Gleichungen wählt, die quadratisch in den a_{ikl} sind und eine passende aus den Gleichungen (148). So geschieht dies z. B. bei Zindler, Liniengeometrie I, Satz 221.

Hier sei noch ein Beispiel behandelt. Bezüglich eines $K_3^{(5)}$ $\pi_\alpha'^2 = 0$ kann man jedem Punkte ξ einen Ebenenkomplex

$$\Gamma \equiv \pi_\alpha'^2 \, \pi_\xi' = 0$$

zuordnen. Jede Ebene dieses $K_2^{(5)}$ gibt mit ξ verbunden einen R_3 des $K_3^{(5)}$. Ist ξ das Zentrum von p^3 bezüglich eines $K_1^{(5)}$, $\pi_{\alpha'}^2 = 0$ und $\pi_\alpha'^2 = 0$ der zugehörige Raumkomplex desselben, so ist der $K_2^{(5)}$ mit dem durch (51) gegebenen identisch.

Es wird K_y für Γ

$$K_y(\Gamma) = (\pi^2 \alpha^2 y \, \xi)$$

und daher

$$Q_y(\Gamma) = (\pi^2 \alpha^2 y \, \xi) \, (\pi^2 \beta^2 y \, \xi) = 0$$

oder

$$\pi_y' \, \pi_\xi' \, (\alpha^2 \beta^2 y \, \xi) = 0 \, ,$$

d. i.

$$J \cdot \pi_y' \, \pi_\xi' \, a_y' \, a_\xi' = 0 \, ,$$

also für $J \gtrless 0$

$$H(\Gamma) = u_\xi' \cdot a_x' \, a_\xi' \, ,$$

d. h. es ist ξ Gegenpunkt zu jedem anderen Punkte; Γ ist also ein polarer Ebenenkomplex mit ξ als Pol. Demgemäß muß $R(\Gamma)$ identisch verschwinden. Setzen wir

$$p_\alpha'^2 \, p_x' = w_x' \, ,$$

so daß w' die Koordinaten des R_4 sind, welcher zu p^3 bezüglich $\pi_\alpha'^2 = 0$ zugeordnet ist, so erhält man leicht

$$A(\Gamma) = \xi_{w'}^2 \equiv 0 \, ,$$

denn ξ und w' liegen vereinigt.

VI. Abschnitt.

Der Geradenkomplex im R_n.

1. Einleitung.

Sind die a'_i zweifältige, n-dimensionale Komplexsymbole, so wird die Gleichung des $K_a \equiv K_1^{(n)}$:

(1) $$\underline{\pi_{a'}^2 = 0}$$

oder in gestrichenen Variablen

(2) $$\underline{\pi_a'^{\,n-1} = 0\,.}$$

Eine Form, welche nur eine Reihe von Variabeln, sonst aber die a'_{ik} von K_a enthält, nennen wir allgemein eine Kovariante des K_a. Wir betrachten vorläufig nur die linearen Kovarianten C_i, wo i der Grad in den a'_{ik} ist.

Man kann jede C_i auf symbolische Produkte von Faktoren $a_{b'}$, $a_{\pi'}$ zurückführen. Wir beweisen nun den Satz:

„Enthält eine Form $a_{b'}$ als Faktor, so enthält sie auch $a_{b'}^2$."

Es sei

$$C_i = a_{b'}\, a_{u'}\, a_{v'}\, a_{w'} \dots b'_y \dots ,$$

also

$$2\,C_i = (a'^2\, b'\, u'\, v'\, w' \dots)\, b'_y \dots ,$$

$$= (b'\, a'^2\, u'\, v'\, w' \dots)\, b'_y\,.$$

Dies gibt nach der Identität (3), Abschnitt V umgeformt:

$$2\,C_i = -2(b'^2\, a'\, u'\, v'\, w' \dots)\, a'_y + (b'^2\, a'^2\, v'\, w' \dots)\, u'_y - \dots ,$$

also nach Vertauschung von a' und b'

$$4\,C_i = (a'^2\, b'^2\, v'\, w' \dots)\, u'_y \dots - \dots ,$$

(3) $$\underline{2\,C_i = a_{b'}^2\, a_{v'}\, a_{w'} \dots u'_y \dots - \dots}$$

Es enthält also C_i $a_{b'}^2$ als symbolischen Faktor. Wir formen jetzt C_i weiter so um, daß kein Symbol $c', d', \ldots$ mit a zusammen in $a_{c'}, a_{d'}, \ldots$ auftritt, d. h. daß a nur mehr in den Faktoren $a_{b'}^2, a_{c'}^2, a_{d'}^2, \ldots$ mit den Koeffizienten des K_a verbunden ist. Dann ziehen wir die ungestrichenen Symbole $a, b, c, \ldots$ zu Ausdrücken $A, B, C, \ldots$ zusammen, so daß wir haben

$$(4)\qquad \begin{cases} A = a_{b'}^2 a_{c'}^2 \ldots a_{\pi'}^{n-2\alpha+1}, \\ B = b_{d'}^2 b_{e'}^2 \ldots b_{\pi'}^{n-2\beta+1} \quad \text{usw.} \end{cases}$$

Die $A, B, C, \ldots$ sind hierbei vom Grade $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ in den a'_{ik}.

C_i ist dann dargestellt durch

$$(5)\qquad \underline{C_i = A \cdot B \cdot C \ldots,}$$

also als symbolisches Produkt von $A, B, C, \ldots$, wobei diese Ausdrücke selbst mittels π' zusammenhängen.

Wenn wir in der Identität (1), Abschnitt V, die Symbole $1, 2, 3, \ldots, n+2$ gruppenartig durch Komplexsymbole ersetzen, so entsteht die Gleichung

$$(6)\qquad \begin{cases} (-1)^{\alpha+1}(\alpha+1)(a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots) a_{u'} \equiv (-1)^{\alpha+\beta}\beta(a^{\alpha+1} b^{\beta-1} c^\gamma \ldots) b_{u'} \\ \qquad + (-1)^{\alpha+\beta+\gamma}\gamma(a^{\alpha+1} b^\beta c^{\gamma-1} \ldots) c_{\mu'} + \ldots \end{cases}$$

Wir schreiben nun nach (5) und (4) C_i in der Form

$$C_i = (a^{n-2\alpha+1} b^{n-2\beta+1} c^{n-2\gamma+1} \ldots \pi^\varepsilon) \cdot A_{\alpha-1} \cdot B_{\beta-1} C_{\gamma-1} \ldots$$

Hierbei ist

$$A_{\alpha-1} = a_{b'}^2 a_{c'}^2 \ldots a_{n'}^2 \qquad (\alpha \text{ Faktoren } a_{b'}^2)$$
$$B_{\beta-1} = b_{c'}^2 b_{d'}^2 \ldots b_{m'}^2 \qquad (\beta \quad \text{"} \quad b_{c'}^2)$$
usw.

Setzen wir der Kürze wegen noch

$$n - 2\alpha + 1 = \alpha' \text{ usw.},$$

so wird

$$C_i = (a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots) A_{\alpha-1} B_{\beta-1} C_{\gamma-1} \ldots,$$
$$C_i = (a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots) a_{b'} a_{b'} A_{\alpha-2} B_{\beta-1} C_{\gamma-1} \ldots$$

Dies können wir nun nach (6) umformen. Wir erhalten Ausdrücke von folgenden beiden Typen:

$$t_1 \ldots (a^{\alpha'+1} b^{\beta'-1} c^{\gamma'} \ldots \pi^{\varepsilon}) b_{d'} a_{d'} A_{\alpha-2} B_{\beta-1} \ldots,$$

$$t_2 \ldots (a^{\alpha'+1} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots \pi^{\varepsilon-1}) \pi_{d'} a_{d'} A_{\alpha-2} B_{\beta-1} \ldots$$

Wenden wir hier abermals (6) an, indem wir $a_{d'}$ zur Umformung heranziehen, so entstehen folgende Typen:

Aus Typus t_1:

$$t_3 \ldots (a^{\alpha'+2} b^{\beta'-2} c^{\gamma'} \ldots \pi^{\varepsilon}) A_{\alpha-2} B_{\beta-1} C_{\gamma-1} \ldots,$$

$$t_4 \ldots (a^{\alpha'+2} b^{\beta'-1} c^{\gamma'-1} \ldots \pi^{\varepsilon}) b_{d'} c_{d'} A_{\alpha-2} B_{\beta-1} \ldots$$

Aus Typus t_2:

$$t_5 \ldots (a^{\alpha'+2} b^{\beta'-1} c^{\gamma'} \ldots \pi^{\varepsilon-1}) b_{d'} \pi_{d'} A_{\alpha-2} B_{\beta-1} \ldots,$$

$$t_6 \ldots (a^{\alpha'+2} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots \pi^{\varepsilon-2}) \pi^2_{b'} A_{\alpha-2} B_{\beta-1} \ldots$$

Wir schreiben nun Typus t_4 in der Form

$$b_{d'} b_{\varrho'}^{\beta'-1} B_{\beta-1} d'_c \cdot A_{\alpha-2} C_{\gamma-1} \ldots;$$

hier tritt der Faktor $b_{d'}$, also nach (3) auch $b^2_{d'}$ auf, so daß also dieser Faktor zu $B_{\beta-1}$ hinzukommt, wodurch Typus t_4 auf folgende beiden Typen führt:

$$t_7 \ldots b_{\varrho'}^{\beta'-2} c_{\varrho'} B_{\beta} A_{\alpha-2} C_{\gamma-1} \ldots,$$

$$t_8 \ldots b_{\varrho'}^{\beta'-1} e'_c e'_b B_{\beta-1} A_{\alpha-2} C_{\gamma-1} \ldots$$

Typus t_7 führt nach Rücksubstitution der ϱ' auf

$$(b^{\beta'-2} c\, a^{\alpha'+2} c^{\gamma'-1} \ldots \pi^{\varepsilon}) B_{\beta} A_{\alpha-2} C_{\gamma-1} \ldots$$

oder

$$(a^{\alpha'+2} b^{\beta'-2} c^{\gamma'} \ldots \pi^{\varepsilon}) B_{\beta} A_{\alpha-2} C_{\gamma-1},$$

also auf Typus t_3. t_8 gibt nach Vertauschung von e' und d' wieder t_4; es ist somit t_4 auf t_3 zurückgeführt.

Ebenso kann man durch Umformungen den Typus t_5 auf t_3 und t_6 zurückführen, so daß also dann C_i zerlegbar ist in die Typen t_3 und t_6.

Es zerfällt also C_i in folgende Glieder, deren Bildungsgesetz man leicht übersieht:

$$(a^{\alpha'+2} b^{\beta-2} c^{\gamma'} \ldots \pi_{\varepsilon}) A_{\alpha-2} B_{\beta} C_{\gamma-1} \ldots$$

und

$$\pi^2_{b'} (a^{\alpha'+2} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots \pi^{\varepsilon-2}) A_{\alpha-2} B_{\beta-1} C_{\gamma-1} \ldots$$

Diese Umformung setzen wir nun so lange fort, bis sämtliche Symbole a, die in $A_{\alpha-2}$ vorkommen, in die Klammer eingegangen sind.

Um das Endresultat zu übersehen, müssen wir unterscheiden, ob n gerade oder ungerade ist.

2. $n = 2k + 1$.

Dann ist $\lambda C_i = (a^{2k-2\alpha+2} b^{2k-2\beta+2} \ldots \pi^{2\varepsilon}) A_{\alpha-1} B_{\beta-1} \ldots$ Es kommen also in der Klammer nur gerade Exponenten vor. Da a $(n-1) = 2k$-fältig ist, so können am Schlusse der Umformung nur Glieder mit den Klammerausdrücken

$$(a^{2k} b^2) \quad \text{und} \quad (a^{2k} \pi^2)$$

übrigbleiben.

Diese führen aber direkt auf

$$b^2_{a'} \quad \text{und} \quad \pi^2_{a'},$$

d. h. C_i zerfällt also überhaupt in Faktoren dieses Typus. Wir ziehen dann alle Glieder mit π zusammen zu:

$$\underline{\Gamma_r = \pi^2_{a'} \pi^2_{b'} \pi^2_{c'} \ldots |r| \ldots \pi^2_{m'};} \tag{7}$$

hierbei soll $|r|$ anzeigen, daß r solche Faktoren $\pi^2_{a'}$ auftreten. Der Rest der Glieder in C_i führt auf eine Potenz der Größe

$$\underline{J = a^2_{b'} a^2_{c'} \ldots |r| \ldots a^2_{k'}} \tag{8}$$

und es ist also

$$\underline{\lambda C_i = J^{\mu} \cdot \Gamma_r.} \tag{9}$$

J ist die einzige Invariante des K_a, wie man leicht beweist. Eine solche enthält nämlich nur Faktoren $a_{b'}$, also nach (3) lauter Faktoren $a^2_{b'}$.

Wir nennen einen $K_1^{(2k+1)}$, dessen $J = 0$ ist, „nullvariant“.

Die Γ_r geben das Formensystem des K_a. Für $r = 1$ erhält man den Grundkomplex selbst. Da π höchstens $(2k+1)$-fältig sein kann, so folgt:

$$2r \leqq 2k + 1,$$

also für ganze r:

$$r \leqq k.$$

Für $r = k$ entsteht ein $K_{n-2}^{(n)}$, der dem $K_1^{(n)}$ dual gegenübersteht.

Γ_r ist ein linearer Komplex von Räumen R_{2r-1}; es existieren einschließlich des K_a selbst k solche Γ_r und alle einreihigen, linearen Kovarianten sind durch diese Formen darstellbar.

Ein $R_{2d+1}(\varrho^{2d+2})$, $d \leqq k$, schneidet den $K_1^{(2k+1)}$ nach einem $K_1^{(2d+1)}$, dessen Gleichung in $(2d+1)$-dimensionalen Linienkoordinaten ω_{ik} ist:

$$(10) \qquad \underline{\sum_{1,\,2d+1}^{i,\,k} \omega_{ik}\, a'_{P_i} a'_{P_k} = 0}\,.$$

Der $R_{2d+1}(\varrho^{2d+2})$ erscheint hierbei durch die Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{2d+2}$ gegeben.

Die Invariante J' dieses Schnittkomplexes $K_1^{(2d+1)}$ wird:

$$|\, a'_{P_1} a'_{P_2} b'_{P_3} b'_{P_4} \ldots m'_{P_{2d+1}} m'_{P_{2d+2}} \,|$$

oder

$$(a'^2 b'^2 \ldots |\, d+1 \,| \ldots m'^2)_{(\varrho^{2d+2})}\,,$$

d. h.

$$(11) \qquad \underline{J' = \varrho_{a'}^2 \varrho_{b'}^2 \ldots |\, d+1 \,| \ldots \varrho_{m'}^2}\,.$$

Hieraus folgt:

„Durch $\Gamma_r = 0$ ist ein $K_{2r-1}^{(2k+1)}$ dargestellt, dessen Räume R_{2r-1} den $K_1^{(2k+1)}$ nach nullvarianten $K_1^{(2r-1)}$ schneiden.“

Ist $\Gamma_r \equiv 0$, so schneidet jeder R_{2r-1} den K_a nach einem nullvarianten $K_1^{(2r-1)}$, wir sagen, der K_a ist „speziell vom Grade r“. So schneidet insbesondere jeder R_3 den K_a nach einem speziellen $K_1^{(3)}$, wenn

$$(12) \qquad \underline{\Gamma_2 \equiv \pi_{a'}^2 \pi_{b'}^2 \equiv 0}$$

ist. Wir wollen den K_a dann „speziell“ nennen. Statt „speziell vom Grade 2“ sagen wir somit einfach „speziell“.

Bei $\Gamma_r \equiv 0$ ist $r \geqq 2$ anzunehmen, da sonst für $r = 1$ überhaupt kein K_a vorliegt, denn es wäre $a'_{ik} = 0$. Da man statt J auch Γ_{k+1} setzen kann, so können wir auch sagen: der nullvariante Komplex ist speziell vom Grade $(k+1)$.

Zu bemerken ist, daß $\Gamma_r \equiv 0$ auch $\Gamma_{r+1} \equiv 0$, $\Gamma_{r+2} \equiv 0$, $\ldots$, $J \equiv 0$ nach sich zieht. Es gibt also k analytisch verschiedene $K_1^{(2k+1)}$.

Wir wollen fernerhin einen $K_d^{(n)}$, dessen R_d einen festen R_{n-d-1} schneiden, „speziell“ nennen und sagen: der feste R_{n-d-1} ist sein „Leitraum“.

Wir werden sehen, daß diese Definition mit der oben für einen speziellen $K_1^{(2k+1)}$ gegebenen in Einklang steht.

Es sei

$$\Gamma_{r+1} \equiv 0 \,,$$

also auch

$$\Gamma_{r+\lambda} \equiv 0 \,.$$

$\Gamma_r = 0$ ist dann ein $K_{2r-1}^{(2k+1)}$ und wir zeigen, daß dieser speziell ist.

Durch einen $K_1^{(2k+1)}$ wird im R_{2k+1} ein Nullsystem erzeugt. So entspricht z. B. einem Punkte y ein R_{2k}

$$a'_x a'_y = 0 \,.$$

Daraus leitet man leicht ab, daß einem $R_{2r-1}(p^{2r})$ ein $R_{2k-2r+1}$ entspricht mit der Gleichung

$$(13) \qquad \underline{\pi_{a'} \pi_{b'} \pi_{c'} \ldots |2r| \ldots \pi_{m'} \cdot p_{a'} p_{b'} p_{c'} \ldots |2r| \ldots p_{m'} = 0}$$

oder, wenn wir allgemeiner für $2r = d + 1$ setzen, so wird der dem $R_d(p^{d+1})$ im R_n durch einen $K_1^{(n)}$ zugeordnete R_{n-d-1}

$$\Phi_d \equiv \pi_{a'} \pi_{b'} \ldots |d+1| \ldots \pi_{n'} \cdot p_{a'} p_{b'} \ldots |d+1| \ldots p_{n'} = 0 \,.$$

Wir schreiben nun Φ_d in der Form:

$$\lambda \Phi_d = (a' b' c' \ldots n' \pi'^{n-d}) \, a'_p b'_p \ldots |d+1| \ldots n'_p$$

und formen dies um, so daß in der Klammer die a', b' usw. zusammengestellt werden; man erhält dann eine Summe von Gliedern der Form

$$(a'^2 b'^2 c'^2 \ldots \pi'^{n-2i+1}) \, \pi'^{2i-d-1}_p \, p^2_{a'} p^2_{b'} \ldots |d-i+1| \ldots p^2_{n'} \,,$$

so daß wir also setzen können

$$(14) \qquad \underline{\Phi_d \equiv \sum_i (a'^2 b'^2 \ldots \pi'^{n-2i+1}) \pi'^{2i-d-1}_p p_{a'} \ldots |d-i+1| \ldots p^2_{n'} \,.}$$

Wenn wir hier unsere Formen Γ einführen, so können wir statt (14) auch schreiben:

$$(15) \qquad \underline{\Phi_d \equiv \sum_i (\Gamma_i)_{\pi'} \, \pi'^{2i-d-1}_p \, (\Gamma_{d-i+1})_p \,.}$$

Die Grenzen für i sind hier:

$$i \geqq \frac{d+1}{2},$$

$$i \leqq \frac{n+1}{2}.$$

Wir setzen nun, um auf obigen Fall zurückzukommen, $n = 2k+1$, $d = 2r-1$, dann wird

$$\Phi_{2r-1} \equiv \sum_i (\Gamma_i)_{\pi'} \pi_p'^{2i-2r} (\Gamma_{2r-i})_p$$

und die Grenzen für i:

$$i \geqq r,$$

$$i \leqq k+1.$$

In Φ_{2r-1} ist also das erste Glied (i ein Maximum)

$$J \cdot \pi_p'^{2k-2r+2} \Gamma_{2r-k-1},$$

das nächste

$$(\Gamma_k)_{\pi'} \pi_p'^{2k-2r} (\Gamma_{2r-2k})_p$$

usw. Da nun nach Voraussetzung $\Gamma_{r+1} \equiv 0$ ist, so wird das erste, nicht verschwindende Glied in Φ_{2r-1} für $i = r$

$$(\Gamma_r)_{\pi'} (\Gamma_r)_p.$$

Andere Glieder kommen dann aber überhaupt nicht vor und da $(\Gamma_r)_p \lessgtr 0$ gesetzt werden kann, so wird:

$$\Phi_{2r-1} \equiv \Gamma_r = 0.$$

Da $\Phi_{2r-1} = 0$ ein spezieller $K_{2r-1}^{(2k+1)}$ ist, so ist also auch $\Gamma_r = 0$ speziell. Der Leitraum ist ein $R_{2k-2r+1}$ mit den Koordinaten:

$$(a'b'^2 \ldots |r| \ldots n'^2)_{iklm\ldots n}.$$

Hieraus folgt nun z. B., daß für $J = 0$ der Komplex $K_{2k-1}^{(2k+1)}$ $\Gamma_k = 0$ speziell ist; die Größen

$$a_{b'}^2\, a_{c'}^2 \ldots |k| \ldots a_{n'}^2\, a_{ik}$$

sind dann Koordinaten einer Geraden, der Leitlinie von $\Gamma_k = 0$.

Für $\Gamma_2 \equiv 0$ ist der K_a selbst speziell, die a'_{ik} sind Koordinaten eines R_{n-2}. Daraus ergibt sich dual:

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, daß die Größen a_{ik} Koordinaten einer Geraden sind, werden gegeben durch die Gleichungen

(16) $$\underline{\pi_a'^2 \pi_b'^2 \equiv 0}$$

oder

(16a) $$\underline{a_{b'}^2 \pi_{b'}^{2k-2} \equiv 0},$$

Diese Relationen sind also quadratisch in den a_{ik}.

3. $n = 2k$.

Wir gehen wieder von C_i aus; diese Form wird hier

$$C_i = (a^{2k-2\alpha+1} b^{2k-2\beta+1} \ldots \pi^{\varepsilon}) A_{\alpha-1} B_{\beta-1} \ldots$$

Durch Umformung vermindern sich die Exponenten immer um zwei Einheiten. Wir kommen also schließlich einmal auf folgende beiden Typen:

$$\tau_1 \ldots (a^{\alpha'} b\, c^{\gamma'} d^{\delta'} \ldots \pi^{\varepsilon'}) A_\varphi B_{k-1} C_\psi \ldots \Pi_\mu ,$$

$$\tau_2 \ldots (a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots \pi) A_\varphi B_\psi C_\chi \ldots \Pi_\mu .$$

Aus τ_1 wird, wenn wir die a weiter in die Klammer schaffen

$$\tau_3 \ldots (a^{\alpha'+1} c^{\gamma'} d^{\delta'} \ldots \pi^{\varepsilon'}) b_{c'} a_{c'} A_{\varphi-1} B_{k-1} \ldots$$

und wieder τ_1, jedoch mit kleinerem $\gamma', \delta', \ldots, \varepsilon'$. In τ_3 kommt $b_{c'}$ vor und gibt nach (3) umgeformt identisch Null. Hieraus folgt dann sofort, daß, wenn wir setzen

(17) $$\underline{a_{b'}^2 a_{c'}^2 \ldots | k-1 | \ldots a_{m'}^2 a_i = S_i},$$

jeder Ausdruck mit $S_{a'}$ identisch verschwindet.

Wir haben uns nun noch mit dem Typus τ_2 zu befassen. Derselbe erledigt sich aber gleich, wenn wir bedenken, daß durch Umformung immer einer der Exponenten $\beta', \gamma', \delta', \ldots$ zum Verschwinden gebracht werden kann. Ist so z. B. $\gamma' = 0$, so treten die c in C_{k-1}, $c_{d'}$ also in $S_{d'}$ auf, d. h. die Form ist nach obigem Satze identisch Null. Bei $n = 2k$ gibt es also keine Form ABC. Insbesondere existiert keine Invariante.

Die einzigen Kovarianten ergeben sich somit durch einen Teil von C_i z. B. durch

(18) $$\underline{A \equiv \Gamma_i \equiv a_{b'}^2 a_{c'}^2 \ldots | i-1 | \ldots a_{x'}^{2k-2i+1}}.$$

i ist hierbei der Grad in den a'_{ik}. Es muß hierbei

$$2k - 2i + 1 \gtreqless 1\,,$$

also $i \geqq 1$ sein. Für $i = 1$ erhält man den K_a selbst.

$i = k$ gibt den „Brennpunkt" S des Komplexes

$$(19) \qquad \underline{S_{u'} \equiv a_{b'}^2 a_{c'}^2 \ldots |k-1| \ldots a_{m'}^2 a_{u'} = 0.}$$

Ist $S_{u'} \equiv 0$, so wollen wir den K_a halbspeziell nennen. Es gibt somit $(k-1)$ verschiedene $K_1^{(2k)}$, welche durch $\Gamma_i \equiv 0$ gekennzeichnet sind. Ist $\Gamma_i \equiv 0$, so ist auch $\Gamma_{i+h} \equiv 0$. Ein $R_{2d}(p^{2d+1})$, $d < k$, schneidet den K_a nach einem $K_1^{(2d)}$:

$$\sum_{1,\,2d+1} \omega_{ik}\, a'_{P_i} a'_{P_k} = 0\,.$$

Hierbei erscheint der R_{2d} durch die $(2d+1)$ Punkte P_i gegeben. Die $2d$-dimensionalen Koordinaten ξ_α des Brennpunktes dieses Schnittkomplexes $K_1^{(2d)}$ sind also:

$$\xi_\alpha = (a'^2 b'^2 \ldots |d| \ldots m'^2)_{(p_1 p_2 \ldots p_{\alpha-1}, p_{\alpha+1}, \ldots, p_{2d+1})}\,.$$

Seine Gleichung im R_{2k} wird somit:

$$\Sigma\, u'_{P_\alpha} \cdot \xi_\alpha = (a'^2 b'^2 \ldots |d| \ldots m'^2 p'^{2k-2d} u') = 0\,.$$

Daraus ergibt sich der Satz:

„Ist $\Gamma_r \equiv 0$, so schneidet jeder $R_{2(r+\lambda)}$ den K_a nach einem halbspeziellen $K_1^{2(r+\lambda)}$.

Bei $n = 2k$ wird durch einen $K_1^{(2k)}$ ebenfalls ein Nullsystem erzeugt, dessen Verwandtschaftsgleichung (13) oder (14), (15) ist. Setzen wir für n und d in (15) $2k$ und $2r-1$, so wird:

$$\Phi_{2r-1} \equiv \sum_i (\Gamma_i)_{\pi'}\, \pi_p'^{\,2i-2r}\, \Gamma_{2r-i}$$

und die Grenzen für i werden:

$$i \geqq r\,,$$

$$i \leqq \frac{2k+1}{2}\,,$$

d. h.

$$i \leqq k\,.$$

Ist nun $\Gamma_{r+1} \equiv 0$, so wird:

$$\lambda \Phi_{2r-1} = (\Gamma_r)_{\pi'} (\Gamma_r)_p \,,$$

d. h. es ist wie bei $n = 2k + 1$ der Satz giltig:

„Ist $\Gamma_{r+1} \equiv 0$, so ist $\Gamma_r = 0$ ein spezieller $K_{2r-1}^{(2k)}$; sein Leitraum ist ein R_{2k-2r}."

So wird z. B. für $r_{\max} = k$:

Ist $\Gamma_k = S_{u'} \equiv 0$, so ist Γ_{k-1} ein spezieller $K_{2k-3}^{(2k)}$ und hat als Leitraum eine Ebene mit der Gleichung

$$(a'^2 b'^2 \ldots | k-1 | \ldots m'^2 \pi'^3) = 0 \,.$$

Für $r_{\min} = 1$ erhält man:

Ist $\Gamma_2 \equiv \pi_{a'}^2 \pi_{b'}^2 \equiv 0$, so wird $\Gamma_1 \equiv \pi_{a'}^2 = 0$ ein spezieller Komplex mit dem $R_{2k-2}(a'_{ik})$ als Leitraum.

Die Bedingungen, daß die a_{ik} Koordinaten einer Geraden sind, bleiben also dieselben wie im R_{2k+1}.

Wenn wir den $K_1^{(2k)} \pi_{a'}^2 = 0$ durch einen $R_{2d+1}(p^{2d+2})$ schneiden, wo $2d + 1 \leqq 2k - 1$ ist, so entsteht ein $K_1^{(2d+1)}$:

$$\sum_{1,\,2d+2} \omega_{ik}\, a'_{P_i}\, a'_{P_k} = 0 \,;$$

dessen Invariante J ist:

$$J = | a'_{P_1} a'_{P_2} b'_{P_3} b'_{P_4} \ldots m'_{P_{2d+1}} m'_{P_{2d+2}} |$$

$$\lambda J = (a'^2 b'^2 \ldots | d+1 | \ldots m'^2 p'^{2k-2d-1}) = \Gamma_{d+1} \,.$$

Ein $R_{2d+1}(p^{2d+2})$ schneidet also nur dann den K_a nach einem nullvarianten $K_1^{(2d+1)}$, wenn der R_{2d+1} dem $K_{2d+1}^{(2k)} \Gamma_{d+1} = 0$ angehört. Dies gilt auch als Definition der Komplexe $\Gamma_i = 0$.

Ist $n = 2k + 1$, so schneidet ein $R_{2d}(p^{2d+1})$ den $K_1^{(2d+1)} \equiv \pi_{a'}^2 = 0$ nach einem $K_1^{(2d)}$. Die $2d$-dimensionalen Koordinaten ξ_α des Brennpunktes dieses $K_1^{(2d)}$ sind dann:

$$\xi_\alpha = (a'^2 b'^2 \ldots | d | \ldots m'^2)_{(P_1 P_2 \ldots P_{\alpha-1}, P_{\alpha+1} \ldots P_{2d+1})} \,,$$

seine Gleichung im R_{2k+1} wird somit:

$$\Sigma\, \xi_\alpha\, u'_{P_\alpha} = 0$$

oder

$$(20) \qquad \underline{(a'^2 b'^2 \ldots | d | \ldots m'^2 p'^{2k+1-2d} u') = 0} \,.$$

Für $\Gamma_d \equiv 0$ schneidet jeder R_{2d} nach einem halbspeziellen $K_1^{(2d)}$.

4. Allgemeines über Komplexinvarianten.

Wir sahen, daß bei $n = 2k + 1$ der Geradenkomplex eine Invariante J vom Grade $(k + 1)$ in den a'_{ik} hat. Eine andere Invariante, etwa von kleinerem Grade, ist nicht möglich, wie oben gezeigt wurde. Es lassen sich allgemein über den niedrigsten Grad einer Komplexinvariante, d. h. einer Invariante eines Komplexes, Formeln aufstellen. Es sei ein $K_d^{(n)}$

$$\pi_{a'}^{d+1} = 0 \quad \text{oder} \quad \pi_a'^{n-d} = 0$$

gegeben und J eine Invariante desselben vom Grade i in den Koeffizienten des Komplexes. J ist dann ein symbolisches Produkt aus Faktoren $a_{b'}$. In dieser Darstellung erscheinen die Koeffizienten des Komplexes teilweise gestrichen als $a'_{ikl\ldots}$, $b'_{ikl\ldots}$, teilweise ungestrichen als $a_{ikl\ldots}$, $b_{ikl\ldots}$.

Nehmen wir nun an, die Koeffizienten kommen i_a-mal ungestrichen und $i_{a'}$-mal gestrichen vor, dann ist offenbar

$$\underline{i = i_a + i_{a'}}\,. \tag{21}$$

Es sind dann $i_a(n - d)$ ungestrichene und $i_{a'}(d + 1)$ gestrichene Symbole in J enthalten, und da immer ein gestrichenes mit einem ungestrichenen Symbol in $a_{b'}$ zusammen vorkommt, muß die Gleichung bestehen

$$\underline{i_a(n - d) = i_{a'}(d + 1)}\,. \tag{22}$$

Aus (21) und (22) folgen die Gleichungen

$$\begin{cases} i_a = \dfrac{(d + 1)\,i}{n + 1}\,, \\[2ex] i_{a'} = \dfrac{(n - d)\,i}{n + 1}\,. \end{cases} \tag{23}$$

Es müssen nun i_a und $i_{a'}$ ganze Zahlen sein. Sind $(d + 1)$ und $(n + 1)$, also auch $(n - d) = (n + 1) - (d + 1)$ und $(n + 1)$ relativ prim, so ist das kleinste i, $i_{\min}$ nach (23)

$$i_{\min} = n + 1\,.$$

Haben jedoch $(d + 1)$ und $(n + 1)$ einen gemeinsamen, größten Teiler m, so ist

$$i_{\min} = \frac{n + 1}{m}\,.$$

Man sieht schon aus diesem einfachen Beispiel, daß eine allgemeine Theorie des $K_d^{(n)}$ sehr viel mit Zahlentheorie zu tun haben wird, insoferne sie überhaupt möglich ist.

Für den $K_1^{(n)}$ wird aus (23)

$$i_a = \frac{2}{n+1} i ,$$

$$i_{a'} = \frac{n-1}{n+1} i .$$

Ist $n = 2k+1$, so wird

$$i_a = \frac{2}{2k+2} i = \frac{i}{k+1} ,$$

$$i_{a'} = \frac{2k}{2k+2} i = \frac{ki}{k+1} ,$$

also $i_{\min} = k+1$; tatsächlich war J vom Grade $k+1$ in den a'_{ik}. Beim $K_d^{(n)}$ sind die Grade etwa vorhandener, anderer Invarianten ein Vielfaches von $i_{\min}$; somit sind dies beim $K_1^{(2k+1)}$, da nur J existiert, Potenzen von J.

Ist $n = 2k$, so ist $i_{\min} = 2k+1$, die dazugehörige Invariante ist $S_{a'}^2 \equiv 0$.

VII. Abschnitt.

Der R_5 als Komplexraum.

1. Die quadratischen R_{n-1} im R_n.

Wir wollen eine solche Punktmenge kurz mit Ω bezeichnen. Ihre Gleichung ist, wenn die a' jetzt gewöhnliche n-dimensionale und zweifältige Symbole sind:

$$\underline{\Omega \equiv a_x'^2 = 0\,.} \tag{1}$$

Ω wird von einem $R_d(p^{d+1})$, der durch die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{d+1}$ gegeben ist, nach einem quadratischen $R_{d-1}\,\Omega'$ geschnitten. Sind $\varkappa_i$ d-dimensionale Koordinaten im R_d, so wird die Gleichung von Ω' im R_d:

$$\underline{\Omega' \equiv \Sigma \varkappa_i^2 a_{P_i}'^2 + 2\,\Sigma \varkappa_i \varkappa_k a'_{P_i} a'_{P_k} = 0\,.} \tag{2}$$

Ist die Diskriminante von Ω

$$\underline{A = (a' b' \ldots | n+1 | \ldots m' n')^2} \tag{3}$$

gleich Null, so enthält Ω einen singulären Punkt, dessen Koordinaten sich aus den n von den $(n+1)$ Gleichungen

$$\underline{a'_\xi a'_i = 0} \tag{4}$$

ergeben.

Wir wenden dies nun auf den durch (2) gegebenen Schnittraum Ω' an. Die Diskriminante A' von Ω' wird

$$\underline{A' = (a'_{P_1} b'_{P_2} c'_{P_3} \ldots | d+1 | \ldots m'_{P_{d+1}})^2\,.} \tag{5}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}(a'_{P_1} b'_{P_2} \ldots m'_{P_{d+1}}) &= (a' b' \ldots | d+1 | \ldots m')_{(P_1 P_2 \ldots P_{d+1})} \\ &= (a' \ldots m')_{(p^{d+1})} \\ &= p_{a'} p_{b'} p_{c'} \ldots | d+1 | \ldots p_{m'}\,.\end{aligned}$$

Ist $A' = 0$, so sagen wir: der R_d „berührt“ Ω; man erhält also die Gleichung von Ω in Raumkoordinaten π^{d+1} in der Form

$$(6)\quad \underline{\Omega_{d+1} \equiv \pi_{a'}\pi_{b'} \ldots |d+1| \ldots \pi_{m'} \cdot \varrho_{a'}\varrho_{b'} \ldots \; d+1 \; \ldots \varrho_{m'} = 0}$$

oder auch

$$(6\text{a})\quad \underline{(\pi'^{\,n-d} a' b' \ldots |d+1| \ldots m')(\varrho'^{\,n-d} a' b' \ldots |d+1| \ldots m') = 0}\,.$$

Ω erscheint hier als besonderer, quadratischer Komplex $K_d^{(n)}$.

Wir gehen nun rasch die verschiedenen Ausartungen durch, die Ω als Punktgebilde darstellen kann. Sie sind analytisch gekennzeichnet durch das identische Verschwinden der Formen Ω_i. Es gilt der Satz:

„Ist $\Omega_d \equiv 0$, so enthält Ω einen singulären R_{n-d}; $\Omega_{d-1} = 0$ wird ein vollständiges Quadrat und stellt diesen singulären R_{n-d} doppelt dar.“

Nehmen wir an $\Omega_d \equiv 0$. Dann bestehen offenbar die Gleichungen

$$(7)\quad \underline{(a'b' \ldots |d+1| \ldots m')_{ikl\ldots}(a'b' \ldots |d+1| \ldots m')_{\alpha\beta\gamma\ldots} \equiv 0}\,.$$

Diese Größen sind aber nichts anderes als die $(d+1)$ reihigen Minoren in

$$A = (n+1)!\,|a_{ik}|\,.$$

A ist daher vom Range d, wenn vorausgesetzt ist, daß Ω_{d-1} nicht identisch verschwindet.

Ist $\Omega_d \equiv 0$, so ist natürlich auch jedes $\Omega_{d+i} \equiv 0$. Wir nehmen nun zur Bestimmung des singulären R_{n-d} d von den $(n+1)$ Gleichungen (4), die wir der Allgemeinheit wegen in der Form

$$a'_x a'_{P_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, d)$$

schreiben, da die Auswahl beliebig ist.

Durch jede dieser Gleichungen ist ein R_{n-1} dargestellt. Diese $d\,R_{n-1}$ schneiden sich in einem $R_{n-d}(p^{n-d+1} = p'^{\,d})$, dem singulären R_{n-d}. Seine Koordinaten sind

$$\lambda p'_{ikl\ldots} = (a'b'c' \ldots |d| \ldots m')_{ikl\ldots}\, a'_{P_i} a'_{P_k} \ldots a'_{P_m}$$

$$= \frac{1}{d!}(a'b' \ldots |d| \ldots m')_{ikl\ldots}\, \varphi_{a'}\varphi_{b'} \ldots |d| \ldots \varphi_{m'}\,.$$

Hier sind die $\varphi_{ikl\ldots}$ willkürlich; λ kann als von Null verschieden durch $p_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ ersetzt werden, dann ist auch

$$\tau\, p'_{ikl\ldots}\, q'_{\alpha\beta\gamma\ldots} = (a'\,b' \ldots |d| \ldots m')_{ikl\ldots} (a'\,b' \ldots m')_{\alpha\beta\gamma\ldots}.$$

Dies gibt aber durch Multiplikation und Summierung

$$\tau(\pi^d_{p'})^2 = \pi_{a'}\,\pi_{b'} \ldots |d| \ldots \pi_{m'} \cdot \varrho_{a'}\,\varrho_{b'} \ldots |d| \ldots \varrho_{m'},$$

somit ist auch der zweite Teil des obigen Satzes bewiesen.

Setzen wir $A = \Omega_{n-1}$, so sind die Ausartungen von Ω durch nur eine der Gleichungen

$$\Omega_{n-1} \equiv 0, \; \Omega_{n-2} \equiv 0, \; \ldots, \; \Omega_2 \equiv 0$$

gegeben, was $(n-2)$ verschiedene Fälle gibt. Ist $\Omega_2 \equiv 0$, so ist $a'^2_x = 0$ ein vollständiges Quadrat und Ω ist ein doppelter R_{n-1}.

2. Der quadratische R_4 im R_5.

Es gibt im R_3 ∞^5 $K_1^{(3)}$ und im R_5 ebenso viele Punkte. Dies ermöglicht, die Geometrie der $K_1^{(3)}$ als fünfdimensionale Raumgeometrie zu behandeln. Jeder Punkt des R_5 repräsentiert dann einen $K_1^{(3)}$.

Ein $K_1^{(3)}$ ist speziell, wenn er einem bestimmten Komplexsystem 2. Ordnung, dem früher (Abschnitt II) genannten „identischen" System angehört.

Ein Punkt des R_5, welcher einen speziellen $K_1^{(3)}$ darstellt, wird daher einem bestimmten, quadratischen R_4 im R_5 angehören. Ist dessen Gleichung

$$F \equiv a'^2_x = 0,$$

so wissen wir, daß die Diskriminante $(a'\,b'\,c'\,d'\,e')^2$ von Null verschieden ist, da sie auch beim identischen System nicht verschwindet.

Wir skizzieren nun kurz die verschiedenen Lagen einer Geraden, Ebene und eines R_3 zu F.

Eine Gerade $p^2 = (x\,y)$ schneidet F in zwei Punkten

$$\varkappa_1^2\, a'^2_x + 2\,\varkappa_1\varkappa_2\, a'_x\, a'_y + \varkappa_2^2\, a'^2_y = 0.$$

Sie liegen harmonisch zu x und y, wenn

$$R_y \equiv a'_x\, a'_y = 0$$

ist. Ist y gegeben, so nennen wir R_y den Polarraum von y.

$P_{\varkappa_1}$ und $P_{\varkappa_2}$ fallen zusammen, wenn

$$p_{a'} p_{b'} q_{a'} q_{b'} = 0$$

ist. p^2 berührt dann F und die Gleichung von F in Linienkoordinaten ist

$$\pi_{a'} \pi_{b'} \varrho_{a'} \varrho_{b'} = 0 .$$

Ist $a_x'^2 \equiv 0$, $a_y'^2 \equiv 0$, $a_x' a_y' \equiv 0$, so werden die $P_\varkappa$ unbestimmt, p^2 liegt ganz in F und ist „erzeugende Gerade" von F. Wir haben also drei Fälle von verschiedenen gegenseitigen Lagen einer p^2 zu F.

So wie zu jedem P_y ein R_y konjugiert ist, so gehört auch zu jeder p^2 ein konjugierter R_3.

Liegt y auf F, so geht R_y durch y und „berührt" F in y, wir nennen dann auch R_y den „Tangential-R_4" von y an F. R_y schneidet F nach einer vierdimensionalen quadratischen Fläche; diese wird ein Kegel mit der Spitze in y, wenn y auf F liegt. Ein Tangentialraum schneidet also F nach einem vierdimensionalen Kegel.

Der Polar-$R_3(p^2)$ von p^2 schneidet F nach einer dreidimensionalen, quadratischen Fläche φ_{p^2}. Berührt p^2 F, so schneidet der $R_3(p^2)$ die Gerade p^2 im Berührungspunkte y. φ_{p^2} wird ein Kegel mit der Spitze y. Ist p^2 erzeugende Gerade von F, so enthält $R_3(p^2)$ p^2 ganz und φ_{p^2} ist ein Ebenenpaar mit der Achse p^2. Die Ebenen dieses Paares liegen ganz in F, sie sind „erzeugende Ebenen".

Hiermit haben wir auch die verschiedenen Lagen eines $R_3(q^4)$ zu F absolviert. q^4 schneidet entweder F nach einer allgemeinen dreidimensionalen Fläche 2. Ordnung φ oder berührt F, d. h. φ ist ein Kegel, oder drittens p^4 schneidet nach einem Ebenenpaar.

Eine Ebene p^3 schneidet F nach einem Kegelschnitt ω. Dieser zerfällt in ein Geradenpaar, wenn p^3 F berührt, oder für

$$p_{a'} p_{b'} p_{c'} q_{a'} q_{b'} q_{c'} = 0 .$$

Die zu p^3 im Polarsystem von F konjugierte E_{p^3} schneidet in diesem Falle p^3 selbst und der Schnittpunkt y ist identisch mit dem Berührungspunkt von p^3 oder mit dem Scheitel des Linienpaares. Endlich kann

p^3 ganz in F liegen, also erzeugende Ebene sein. E_{p^3} fällt dann mit p^3 zusammen.

Es gibt drei verschiedene Paare von erzeugenden Ebenen α^3 und β^3.

1. α^3 und β^3 schneiden sich überhaupt nicht. Es seien p^2 und q^2 zwei erzeugende Gerade. $R_3(p^2)$ und $R_3(q^2)$ schneiden sich in einer Geraden λ^2, welche F in P_1 und P_2 trifft. $R_3(p^2)$ und $R_3(q^2)$ schneiden F nach den Ebenenpaaren (1, 2) und (3, 4).

P_1 und P_2 mit p^2 und q^2 verbunden gibt vier erzeugende Ebenen, welche mit den obigen vier der zwei Paare identisch sind. Gibt nun z. B. P_1 mit p^2 und q^2 verbunden die Ebenen 1 und 3, P_2 mit p^2 und q^2 verbunden 2 und 4, so können sich 1 und 4 oder 3 und 2 nicht schneiden, da ihr Schnittpunkt auf λ^2 liegen müßte.

2. α^3 und β^3 haben einen Punkt gemeinsam. Dies ist z. B. bei den obigen Ebenen 1 und 3 der Fall.

3. α^3 und β^3 schneiden sich nach einer Geraden (liegen in einem R_3). Dies ist bei den obigen Ebenen 1 und 2 der Fall.

Nachdem wir so die möglichen Lagen der linearen Räume zu $\mathfrak{F}$ durchsprochen haben, wollen wir einige Sätze aus dem R_5 ins Komplexgebiet des R_3 übertragen. Wir bedienen uns hierbei der früheren Bezeichnung (Abschnitt II). Einen speziellen Komplex ersetzen wir, wo es der Sprachgebrauch erlaubt, durch seine Achse.

3. Der Komplexraum.

Punkt y,	linearer Komplex $K_1^{(3)}$,
Gerade p^2,	Komplexbüschel,
Ebene q^3,	Komplexnetz,
Raum $R_3(q^4)$,	Komplexgebüsch,
Raum $R_4(v')$,	Komplexebene,
$F \equiv a_x'^2 = 0$,	identisches Komplexsystem,
$\Phi \equiv \alpha_x'^2 = 0$,	Komplexsystem 2. Ordnung,
Schnitt von F und Φ,	quadratischer Komplex,
Punkt auf F,	Gerade,
Zwei konjugierte Punkte.	Zwei Komplexe in Involution.

Es gibt drei verschiedene Lagen einer Geraden zu F:	Es gibt drei verschiedene Büschel:
1. p^2 liegt allgemein und trifft F in zwei getrennten Punkten.	1. Das Büschel ist allgemein und enthält zwei spezielle $K_1^{(3)}$ mit getrennten Leitlinien.
2. p^2 trifft F in zwei zusammenfallenden Punkten, oder p^2 berührt F.	2. Im Büschel fallen die beiden speziellen $K_1^{(3)}$ zusammen, oder das Büschel ist speziell.
3. p^2 liegt ganz in F, d. h. jeder Punkt von p^2 gehört F an, p^2 ist erzeugende Gerade.	3. Jeder Komplex des Büschels ist speziell, das Büschel ist singulär.
Zu jedem Punkte y gehört ein Polar-R_4 als Gesamtheit derjenigen Punkte, welche zu y konjugiert sind.	Zu jedem $K_1^{(3)}$ gehört eine Polarkomplexebene als Gesamtheit derjenigen Komplexe, welche mit dem $K_1^{(3)}$ involutorisch liegen.
Liegt y auf F, so berührt der Polar-R_4 F.	Ist der $K_1^{(3)}$ speziell, so berührt die Polarkomplexebene das identische System 2. Ordnung.
Zu jeder Geraden p^2 gehört ein konjugierter $R_3(p^2)$, welcher F nach einer dreidimensionalen, quadratischen Punktmenge schneidet. Die Punkte dieser Schnittfläche sind konjugiert zu den Punkten von p^2.	Zu jedem Büschel gehört ein „ergänzendes" Komplexgebüsch, welches ∞^2 spezielle Komplexe enthält. Die Achse eines jeden solchen speziellen Komplexes gehört allen Komplexen des Büschels an. Diese Geraden bilden also die Kongruenz des Büschels.
Berührt p^2 F, so berührt auch der $R_3(p^2)$ F und schneidet p^2 im Berührungspunkte.	Ist das Büschel speziell, so ist auch das ergänzende Gebüsch speziell und hat mit dem Büschel einen speziellen Komplex gemeinsam.
Ist p^2 erzeugende Gerade, so enthält $R_3(p^2)$ p^2 ganz.	Ist das Büschel singulär, so ist es ganz in seinem ergänzenden Gebiet vorhanden.

Alle diese Beziehungen lassen sich natürlich auch dual aussprechen, was wir hier jedoch unterlassen.

Eine Ebene p^3 schneidet F nach einem Kegelschnitt.

Die speziellen $K_1^{(3)}$ eines Komplexnetzes bilden eine einfach-unendliche, quadratische Menge. Es erscheint somit hier eine Regelschar einer Fläche 2. Ordnung als Kegelschnitt im R_5 abgebildet.

Alle Punkte, welche zu jedem Punkt von p^3 konjugiert sind, liegen in der zu p^3 konjugierten Ebene E_{p^3}. Diese schneidet F nach einem Kegelschnitt und jeder Punkt desselben ist konjugiert zu den Punkten von p^3.

Alle $K_1^{(3)}$, welche zu allen $K_1^{(3)}$ des Netzes N involutorisch liegen, bilden das „ergänzende" Netz von N. Dieses bestimmt durch die Achsen seiner speziellen $K_1^{(3)}$ eine Regelschar und jede Erzeugende derselben ist in allen $K_1^{(3)}$ des Netzes vorhanden.

Dem Schnittkegelschnitt φ von p^3 ist der von E_{p^3} ψ so zugeordnet, daß durch den einen Kegelschnitt der andere bestimmt ist. Die Tangenten an φ oder ψ, welche in p^3 bzw. E_{p^3} liegen, sind keine erzeugenden Geraden von F.

Die zwei erzeugenden Scharen S_1 und S_2 sind einander derart zugeordnet, daß durch die eine die andere bestimmt ist. Die Büschel, welche in S_1 oder S_2 enthalten sind, sind niemals singulär, d. h. zwei Erzeugende derselben Schar haben niemals einen Punkt gemeinsam.

Jeder Punkt von φ mit jedem von ψ verbunden gibt eine erzeugende Gerade von F.

Jede Erzeugende von S_1 schneidet jede Erzeugende von S_2.

Nennen wir φ und ψ konjugierte Kegelschnitte auf F, so wird dann durch ein solches Paar eine Fläche 2. Ordnung und Klasse im R_3 abgebildet. Die Geometrie der Regelscharen im R_3 ist also auf die Geometrie der Ebenen im R_5 zurückgeführt.

Schneiden sich zwei Ebenen, so schneiden sich auch ihre konjugierten. Die zwei Schnittpunkte sind konjugiert.

Haben zwei Komplexnetze einen Komplex gemeinsam, so haben auch die ergänzenden Netze eine $K_1^{(3)}$ gemeinsam; diese zwei $K_1^{(3)}$ liegen involutorisch.

Schneidet p^3 ihre konjugierte E_{p^3}, so berührt p^3 F.

Hat das Netz mit seinem ergänzenden einen $K_1^{(3)}$ gemeinsam, so wird das Netz singulär.

Fällt p^3 mit E_{p^3} zusammen, so ist p^3 erzeugende Ebene von F.

Ist jeder Komplex des Netzes speziell, so fällt das Netz mit seinem ergänzenden zusammen.

Es gehören dann alle speziellen Komplexe demselben Feld oder Bündel an. Im R_5 gibt es hierfür keine analytische Untersuchung, da durch eine erzeugende Gerade sowohl ein Punkt als auch eine Ebene abgebildet wird.

In F gibt es drei verschiedene Paare von erzeugenden Ebenen:

1. Zwei Ebenen schneiden sich nicht, d. h. sie haben keinen Punkt gemeinsam.

2. Zwei Ebenen haben einen Punkt gemeinsam.

3. Zwei Ebenen haben eine erzeugende Gerade gemeinsam.

Die singulären Netze können auf drei Arten zu Paaren geordnet werden:

1. Ein Feld und ein Bündel, dessen Zentrum nicht der Ebene des Strahlenfeldes angehört, haben keine Gerade gemeinsam.

2. Zwei Felder oder zwei Bündel haben eine Gerade gemeinsam.

3. Ein Feld und ein Bündel, dessen Zentrum in der Ebene des Feldes liegt, haben ein Strahlenbüschel gemeinsam.

Wir wollen mit diesen Sätzen hier abbrechen. Durch die Scheinvorstellungen im R_5 läßt sich leichter operieren wie im Komplexgebiet des R_3; obige Sätze lassen dies zur Genüge erkennen.

VIII. Abschnitt.

Die analytische Geometrie.

1. Die Grundlagen.

Es soll in folgendem der Zusammenhang zwischen Symbolik und dem Koordinatengrundbegriffe der analytischen Geometrie gezeigt werden. Die obigen Abschnitte setzten den Begriff der Koordinaten von Punkt und R_{n-1} ohne weiteres voraus; wir verzichten nun auf diese Voraussetzung und zeigen, daß man die Symbolik direkt begründen kann, nur von den geometrischen Elementargebilden allein ausgehend. Es soll jedoch hier nicht gleich mit einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeitslehre begonnen werden, sondern wir nehmen denselben Weg, nach welchem die Entwicklung der Geometrie des R_n verlaufen ist, d. h. wir beginnen beim Einfachsten. Zudem beschränken wir uns vorläufig auf ein, unseren Sinnen direkt zugängliches, oder wie wir sagen wollen, „endliches" Gebiet. Der Grenzbegriff ∞ der Mathematik wird jedoch ohne weiteres vorausgesetzt.

Die Erfahrung liefert uns die vulgären Begriffe: Körper, Oberfläche, Linie und Punkt. Aus diesen ergeben sich durch weitgehende Abstraktion die geometrischen Begriffe: Raum, Fläche, Linie und Punkt. Der Punkt erscheint uns als einfachstes Raumelement und kann zur Erzeugung von Linien, Flächen und Körpern herangezogen werden. Man kann dann auch eine Linie, Fläche und einen Körper (Raum) als stetige Menge von ∞^1, ∞^2 und ∞^3 vielen Punkten definieren.

Unsere Umgebung als Ganzes, mit Einschluß des eigenen Körpers, nennen wir Raum im allgemeinsten Sinne. In diesem sind uns durch unseren Körper drei physiologisch verschiedene Richtungen gegeben: rechts — links, oben — unten, vorne — hinten.

Wir drücken dies aus, indem wir sagen, daß unser Raum dreidimensional ist. Demgemäß nennen wir eine Fläche einen zweidimensionalen, eine Linie einen eindimensionalen Raum. Um konsequent zu sein, sagen wir weiter, der Punkt ist nulldimensional.

Wir definieren nun drei fortwährend angewendete Begriffe: 1. das „Ineinanderliegen“, 2. das „Bestimmtsein“ und 3. das „Sichschneiden“ von geometrischen Elementen (Punkte, Linien und Flächen).

1. Wir sagen, ein Punkt liegt auf einer Linie oder Fläche, oder auch, die Linie oder Fläche geht durch einen Punkt, wenn dieser in der durch die Linie oder Fläche gegebenen Punktmenge enthalten ist.

Eine Linie liegt dann in einer Fläche, wenn jeder Punkt der Linie in der Fläche liegt.

2. Wir sagen, eine Fläche ist bestimmt, wenn ein Punkt, der ihr angehören soll, nicht ganz willkürlich in der dreifach unendlichen Menge von Punkten im Raume gewählt werden darf.

Ebenso ist eine Linie bestimmt, wenn ein Punkt, der ihr angehören soll, nicht ganz willkürlich in der zweifach-unendlichen Menge von Punkten einer durch die Linie gelegten Fläche gewählt werden darf. Wodurch dieses Bestimmtsein erreicht wurde, ist an sich gleichgültig.

3. Wir sagen, zwei Flächen, zwei Linien oder eine Fläche und eine Linie schneiden sich, wenn sie mindestens einen Punkt miteinander gemeinsam haben.

Wir hätten somit die allgemeinsten Begriffe von den Lagebeziehungen der geometrischen Gebilde aufgestellt und gehen nun zu den einfachsten dieser Gebilde selbst über. Es ist klar, daß durch von uns geschaffene Begriffe allein noch keine geometrische Disziplin entstehen kann. Erst durch Erfahrungstatsachen wird eine reelle Grundlage gewonnen. Wir können daher zweierlei geometrische Sätze unterscheiden: 1. solche, welche unmittelbar der Erfahrung entnommen sind, 2. solche, die wir aus ersteren mit Hilfe unserer Denkgesetze ableiten. So sind z. B. die Sätze 1, 2, 3 von der ersten Art, 4, 5, 6, 7, 8 von der zweiten. (Vgl. unten.)

Die Erfahrung führt zu folgenden Sätzen:

1. „Es gibt Linien, welche durch zwei Punkte vollkommen bestimmt sind.“ Solche Linien nennen wir „Gerade“.

2. „Es gibt Flächen, die durch drei, nicht auf einer Geraden liegende Punkte vollkommen bestimmt sind.“ Solche Flächen nennen wir „Ebenen“.

3. „Wenn sich zwei Ebenen schneiden, d. h. wenn sie einen Punkt gemeinsam haben, so geschieht dies nach einer Geraden.“

Aus diesen drei Sätzen ergibt sich nun leicht, wobei wir die Beweise auslassen:

Aus 1:

4. „Wenn sich zwei Gerade schneiden, so geschieht dies nur in einem einzigen Punkt.“ Weiter:

5. „Liegen zwei Punkte P_1 und P_2 einer Geraden g in der Ebene E, so liegt jeder Punkt von g in E, also liegt g ganz in E.“

6. „Zwei sich schneidende Gerade liegen in einer Ebene.“

7. „Wenn eine Gerade eine Ebene schneidet, so geschieht dies nur in einem einzigen Punkte.“

8. „Drei sich schneidende Ebenen haben nur einen Punkt gemeinsam, wenn sie nicht durch dieselbe Gerade gehen.“

2. Die Symbolik.

Nachdem wir so die bei allen geometrischen Untersuchungen und Konstruktionen unentbehrlichen Ebenen und Geraden definiert und deren einfachste Lagebeziehungen erörtert haben, gehen wir zur Hauptaufgabe über. Diese besteht in der Herstellung des Zusammenhanges von Geometrie und Mathematik, d. h. in der Anwendung der Rechenoperationen auf geometrische Gebilde. Die Geschichte der Geometrie, sowie schon das Wort „Geometrie“ zeigt, daß diese Wissenschaft sich eben durch Verwertung mathematischer Begriffe, insbesondere des Zahlbegriffes, auf geometrische Anschauungsformen entwickelt hat. Das „Messen“ von Räumen, Flächen und Längen bietet ja unmittelbar praktisches Interesse, wogegen die Untersuchung von Lagebeziehungen allein, die „Geometrie der

Lage", sich erst dem Forscher als Notwendigkeit aufdrängt. In den meisten Lehrbüchern, durch welche der Anfänger in die Geometrie eingeführt wird, ist ja noch derselbe Weg eingehalten; der Schüler wird gleich mit Begriffen wie „Strecke", „Winkel", „Messen" usw. vertraut. Es ist dies ganz natürlich, da sich diese Begriffe auf die unmittelbare Anschauung gründen, wogegen die Objekte der projektivischen Geometrie gewissermaßen abstrakter erscheinen und ihre Handhabung wissenschaftliches Denken erfordert.

Wir wollen nun in folgendem ohne jedwede metrische Grundlage die „analytische Geometrie" begründen. Und zwar beschränken wir uns vorläufig auf die Ebene, von welcher sich die Resultate leicht auf den Raum übertragen lassen. Die weitere Ausdehnung auf n Dimensionen ist dann eine theoretische Notwendigkeit.

Wir knüpfen an eine schon oben verwendete, dem abgekürzten Sprachgebrauche entnommene Bezeichnungsweise an und ordnen jeder Geraden und jedem Punkt einen Buchstaben, etwa g und P, zu. Um von verschiedenen Geraden sprechen zu können, hängen wir an g noch einen Index an, so daß wir also von Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_i$ und von Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_i$ reden.

Wir haben über die Symbole g und P keinerlei Voraussetzung gemacht, können daher die Annahme machen, daß sich mit ihnen wie mit algebraischen Größen, d. h. wie mit den Symbolen, die in der Buchstabenrechnung verwendet werden, rechnen läßt. Es hat dies jedenfalls auf gegebene, geometrische Gebilde (Gerade, Punkt), welche durch diese Buchstaben bezeichnet sind, gar keinen Einfluß, da ja eine Rechenoperation mit Geraden oder Punkten als Raumgebilden vollständig sinnlos ist. Erst dann, wenn wir irgend einer Rechenoperation einen bestimmten, geometrischen Sinn beilegen, läßt sich das Rechnen mit den Symbolen in die geometrische Anschauungsweise übertragen. Dann erst werden sich auch Beziehungen, welche die Rechnung mit den Symbolen liefert, in die Sprache der Geometrie umsetzen lassen und einen geometrischen Satz bedeuten.

Am einfachsten geschieht dies nun folgend:

Betrachten wir einen Punkt P_0 und eine Gerade g_1. Bezüglich der gegenseitigen Lage von P_0 und g_1 ergeben sich zwei und nur zwei Möglichkeiten: P_0 liegt auf g_1 oder P_0 liegt nicht auf g_1. Die erstere Möglichkeit, „nämlich daß P_0 auf g_1 gelegen ist, drücken wir nun durch eine Gleichung aus“, indem wir schreiben

$$g_{10} \equiv 0\,,$$

d. h. wir hängen den Punktindex „0“ als zweiten Index an g_1 und setzen das Symbol g_{10} gleich Null.

Die Gleichung $g_{10} \equiv 0$ drückt dann die geometrische Tatsache aus, daß P_0 auf g_1 liegt; es ist jedenfalls nur eine andere Redeweise, wenn wir sagen, g_1 geht durch P_0. Dies drücken wir analog durch

$$P_{01} \equiv 0$$

aus. Hieraus ist der duale Charakter unserer Schreibweise ersichtlich.

Auf einer Geraden gibt es nun ∞^1 viele Punkte. Um auch dies durch eine Gleichung zu fixieren, lassen wir im Symbol g_{10} den zweiten Index „0“ weg, welcher einen speziellen Punkt P_0 auf g_1 anzeigt, und schreiben

$$g_1 = 0\,.$$

Wir können dann sagen, dies ist die „Gleichung der Geraden g_1, welche so durch ihre sämtlichen Punkte dargestellt erscheint.“

Es seien nun g_1 und g_2 zwei sich im Punkte P_0 schneidende Gerade, so daß also

$$g_{10} \equiv 0 \quad \text{und} \quad g_{20} \equiv 0$$

ist. Dann ist aber auch der Ausdruck

$$g_{30} \equiv g_{10} - \lambda\, g_{20}$$

identisch Null.

Die Gleichung $g_3 = 0$ oder $g_1 - \lambda g_2 = 0$ stellt daher eine Linie dar, von der nur verlangt wird, daß sie durch einen gegebenen Punkt P_0 geht.

In $g_1 - \lambda g_2 = 0$ kommt nun ein einziger Parameter λ vor; wir können daher die Linie $g_1 - \lambda g_2 = 0$ einer Bedingung unterwerfen, z. B. daß sie durch einen gegebenen Punkt P_i geht, der nicht auf g_1 oder g_2 liegt, so daß

$$g_{1i} \gtrless 0\,, \quad g_{2i} \gtrless 0$$

ist. Dann muß aber $g_{3i} = g_{1i} - \lambda g_{2i} \equiv 0$ sein, d. h.

$$\lambda = \frac{g_{1i}}{g_{2i}}$$

und eingesetzt wird die Gleichung von g_3 jetzt

$$g_1 - \frac{g_{1i}}{g_{2i}} g_2 = 0 .$$

Darin kommt nun keine unbestimmte Größe mehr vor, wie früher λ. Es sind in der Gleichung nur Symbole von wirklich vorhandenen Punkten und Geraden vorhanden. Dies erreichten wir durch die Bedingung, daß g_3 außer durch P_0 auch durch P_i geht. g_3 war dann bestimmt, ist somit auch eine Gerade.

Wir haben daher den Satz:

„Sind g_1 und g_2 zwei sich schneidende Gerade, so ist durch die Gleichung $g_1 - \lambda g_2 = 0$, wo λ ein aus Symbolen gegebener, geometrischer Elemente zusammengesetzter Ausdruck ist, eine durch den Schnittpunkt von g_1 und g_2 gehende Gerade dargestellt."

λ als arithmetische Zahl zu denken, hätte vorläufig noch gar keinen Sinn, da wir in unseren Gleichungen bis jetzt nur Symbole von wirklich vorhandenen Punkten und Geraden verwenden; erst weiter unten werden wir andeuten, inwieweit sich diese Symbole durch Zahlen ersetzen lassen.

Der obige Satz ist auch umkehrbar:

„Jede durch den Schnittpunkt von g_1 und g_2 gehende Gerade läßt sich durch eine Gleichung $g_1 - \lambda g_2 = 0$ darstellen."

Man braucht auf der darzustellenden Geraden nur einen Punkt P_i anzunehmen, so ist dann $\lambda = \frac{g_{1i}}{g_{2i}}$.

Duale Betrachtungen können natürlich ebenso durchgeführt werden. $P_1 - \lambda P_2 = 0$ ist dann die Gleichung eines Punktes auf der Geraden $P_1 P_2$ usw.

3. Die analytische Geometrie.

Wir nehmen nun drei sich in P_1, P_2, P_3 schneidende Gerade g_1, g_2 und g_3 an. P_i sei ein Punkt, der auf keiner der drei Geraden liegt.

Durch P_i und P_1, sowie durch P_i und P_2 ist je eine Gerade γ_1 und γ_2 bestimmt; deren Gleichungen sind nach obigem:

$$(1)\qquad \begin{cases} \gamma_1 \equiv \dfrac{g_2}{g_{2i}} - \dfrac{g_3}{g_{3i}} = 0\,, \\[2ex] \gamma_2 \equiv \dfrac{g_3}{g_{3i}} - \dfrac{g_1}{g_{1i}} = 0\,. \end{cases}$$

γ_1 und γ_2 schneiden sich in P_i.

Ist nun P_k ein weiterer, nicht auf g_1, g_2 oder g_3 liegender Punkt, so wird die Gleichung der Geraden $P_i P_k$:

$$(2)\qquad \underline{\gamma_1 - \frac{\gamma_{1k}}{\gamma_{2k}}\gamma_2 = 0\,.}$$

Setzen wir hier die Ausdrücke für γ_1, γ_2 und

$$\gamma_{1k} = \frac{g_{2k}}{g_{2i}} - \frac{g_{3k}}{g_{3i}}\,, \qquad \gamma_{2k} = \frac{g_{3k}}{g_{3i}} - \frac{g_{1k}}{g_{2i}}$$

ein, so erhalten wir die Gleichung der durch die zwei Punkte P_i und P_k bestimmten Geraden

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ g_{1i} & g_{2i} & g_{3i} \\ g_{1k} & g_{2k} & g_{3k} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Wir können nun das Dreieck $g_1 g_2 g_3$ das Koordinatendreieck und die Symbole g_{1i}, g_{2i}, g_{3i} die Koordinaten von P_i nennen.

Aus (3) ergibt sich dann sofort die Bedingung, daß drei Punkte auf einer Geraden liegen

$$\begin{vmatrix} g_{1i} & g_{2i} & g_{3i} \\ g_{1k} & g_{2k} & g_{3k} \\ g_{1l} & g_{2l} & g_{3l} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Wir schreiben nun statt der Symbole g_{1i}, g_{2i}, g_{3i} die Buchstaben x_1, x_2, x_3 und sind hierdurch auch formell mit den gewöhnlichen, homogenen Dreieckskoordinaten in Übereinstimmung.

Wir hätten somit die Aufgabe erledigt, irgend eine projektivische Konstruktion in mathematische Formeln einzukleiden. Zu berücksichtigen ist dabei nur folgendes: Unsere bisherigen Gleichungen haben nur dann einen geometrischen Sinn, wenn es sich stets um Symbole wirklich vorhandener Punkte und Geraden handelt.

Der weitere Ausbau der analytischen Geometrie in der bisher behandelten Art hat weiter keine Schwierigkeit. Hervorzuheben wäre noch, daß die Begriffe wie „Doppelverhältnis", „Transformation" usw. der projektivischen Geometrie sich ohne weiteres auf unsere Symbolrechnung anwenden lassen. Ebenso ist der Übergang zum drei- und mehrdimensionalen Raum leicht durchzuführen.

Die Definition der Koordinaten der R_d im R_n erfolgt durch die Determinanten einer Matrix, genau so wie oben. (Abschnitt IV.) Diese Koordinaten werden dann durch Komplexsymbole dargestellt, welche vereinigt wirkliche Zahlen $p_{ikl\ldots}$ geben. Zwischen diesen $\binom{n+1}{d+1}$ Koordinaten $p_{ikl\ldots}$ bestehen aber eine Reihe von Identitäten, da es im Raume R_n nur $(n-d)(d+1)$ Räume R_d gibt. Diese Identitäten sind für den R_3, R_4 und R_5 gegeben worden. Läßt man diese Identitäten zwischen den $p_{ikl\ldots}$ gänzlich fallen, so kann man die $p_{ikl\ldots}$ als Koordinaten des $K^{(n)}_{n-d-1}$ auffassen, der durch $\pi_p'^{d+1} = 0$ gegeben erscheint.

Man kann aber auch den Komplex $K^{(n-\alpha)}_d$ im R_n als Raumgebilde auffassen und mit ihm operieren. Seine Koordinaten lassen sich dann ebenfalls symbolisch leicht darstellen und stehen gewissermaßen in der Mitte zwischen den $p_{ikl\ldots}$, welche Koordinaten eines R_d im R_n sind und jenen $p_{ikl\ldots}$, welche Koordinaten eines $K^{(n)}_{n-d-1}$ sind. Ein Beispiel wird dies näher erläutern. Ein $K^{(3)}_1$ ist im R_4 gegeben durch einen $K^{(4)}_1$ und einen schneidenden $R_3(v')$. Fassen wir den $K^{(3)}_1$ im R_4 als Raumgebilde (lineares) auf, so sind dessen Koordinaten im R_4 die Determinanten ϱ_{ikl} der Matrix

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{vmatrix}.$$

Also z. B.

$$\varrho_{123} = 2(a_{12} v_3 + a_{23} v_1 + a_{31} v_2).$$

Die a_{ik} sind hierbei die Koordinaten eines $K_1^{(4)}$, dessen Schnitt mit v' eben der darzustellende $K_1^{(3)}$ im R_4 ist. Die ϱ_{ikl} haben also die Form von Ebenenkoordinaten im R_4, mit dem Unterschiede, daß zwischen ihnen nicht die Identitäten der Ebenenkoordinaten im R_4 bestehen.

Wir weisen noch kurz darauf hin, inwiefern sich unsere symbolischen Koordinaten durch Zahlen ersetzen lassen.

Es seien durch P_0 drei Strahlen g_1, g_2 und $g_\lambda \equiv g_1 - \lambda g_2 = 0$ gegeben. Wir nennen g_1 und g_2 die Grundstrahlen. Man kann nun zu g_λ bezüglich g_1 und g_2 den harmonisch-konjugierten Strahl durch P_0 konstruieren und diese Konstruktion, die immer ausführbar ist, analytisch verfolgen. Man erhält dann als Gleichung des vierten Strahles

$$g_1 + \lambda g_2 = 0.$$

Unter diesen vier Strahlen kann man wieder drei wählen und die harmonische Konstruktion so anwenden, daß man einen neuen, fünften Strahl durch P_0 erhält. (Vgl. hierüber Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, 2. Band.) Durch systematische Anwendung der harmonischen Konstruktion ergeben sich dann, wenn wir für λ eine beliebige Zahl setzen, alle Strahlen $g_1 + \sigma g_2 = 0$, wo σ wieder eine willkürliche Zahl ist.

Es erscheint also im Strahlenbüschel durch Fixierung dreier Strahlen, etwa für $\lambda = 0, 1, \infty$, jedem Strahle eine Zahl zugeordnet. Hierdurch können wir aber auch schon die Dreieckskoordinaten als Zahlen denken. Ist $g_1 g_2 g_3$ ($P_1 P_2 P_3$) das Fundamentaldreieck, so haben wir in der Koordinatenebene die drei Büschel P_1, P_2, P_3; in jedem derselben sind zwei Strahlen bereits gegeben, nämlich die Seiten des Fundamentaldreiecks. Ihnen ordnen wir 0 und ∞ zu in jedem der Büschel. Nun brauchen wir in jedem Büschel noch einen dritten Strahl, den „Einheitsstrahl“. Wir erhalten ihn am einfachsten, wenn wir einen Punkt, den „Einheitspunkt“, mit den drei Scheiteln der drei Büschel verbinden. Wie leicht zu zeigen, sind dann unsere oben definierten Koordinaten eines Punktes P_0 nichts anderes als die Doppelverhältnisse der drei Strahlenquadrupel, welche entstehen, wenn wir jeden P_i mit den beiden anderen Fundamentalpunkten, dem Einheitspunkt und P_0 verbinden.

Durch die Einführung der Zahlen in die analytische Geometrie wird aber eine weitere Spezialisierung derselben gefordert, als deren Ursache die Endlichkeit des Bereiches unserer Sinnestätigkeit auftritt. Wenn wir nämlich versuchen, so wie im Strahlenbüschel die einzelnen Strahlen, auf der Geraden die einzelnen Punkte durch Zahlen zu fixieren, stoßen wir auf verschiedene Möglichkeiten. Die Fixierung geschieht am einfachsten dadurch, daß wir die betreffende Gerade g in Beziehung zu einem schon „numerierten“ Strahlenbüschel bringen. Wir schneiden g durch ein Büschel, in welchem zu jedem Strahl g_λ eine Zahl λ gehört und ordnen auf g dem Schnittpunkte $(g_\lambda g)$ die Zahl λ zu. Selbstverständlich darf das Zentrum des Büschels nicht auf g liegen. Die weitere Ausführung dieser Zuordnung führt dann auf das Parallelenaxiom und zur Spezialisierung der Geometrie in elliptische, parabolische und hyperbolische Geometrie, worauf aber hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Diese Ausführungen sollen gezeigt haben, daß durch die symbolische Schreibweise tatsächlich der einfachste Vorgang dargestellt wird, geometrische Konstruktionen mathematisch zu verfolgen, was ja die Hauptaufgabe der „analytischen Geometrie“ ist.